

1912.

No. 14.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 39. Heft 4.

DER GANZEN REIHE 344. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1912.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.  
(Ausgegeben am 12. November 1912.)*

# Inhalt.

	Seite
1. Peter Paul Koch. Über ein registrierendes Mikrophotometer	705
2. Ludwig Geiger. Ein lichtstarker, glasfreier stigmatischer Gitterspektrograph und seine Anwendung zur photographischen Bestimmung des roten und ultraroten Eisenbogenspektrums zwischen 6750 und 9809 Å.-E. . . . .	752
3. P. Debye. Zur Theorie der spezifischen Wärmen . . . . .	789
4. Peter Lebedew †. Über die magnetische Fernwirkung rotierender Körper . . . . .	840
5. H. Baerwald. Über die Erregung von Erdalkaliphosphoren durch Kanalstrahlen . . . . .	849
6. Léon Schames. Nachtrag zu meiner Arbeit: Eine neue Hypothese über das Wesen der verschiedenen Aggregatzustände und Modifikationen . . . . .	887

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

e  
5

2  
9

0

9

7

n  
n  
e

n  
n

t  
s  
n  
r

t  
t  
n  
n  
u

s  
n  
t,





# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 39.

### 1. *Über ein registrierendes Mikrophotometer;* *von Peter Paul Koch.*

#### § 1. Vorbemerkungen.

Die Beschäftigung mit einer Untersuchung, deren Zweck es ist, die wahre Intensitätsverteilung (spektrale Energieverteilung) in Spektrallinien zu ermitteln, und die auf photographisch-photometrischem Wege<sup>1)</sup> durchgeführt wird, führte zur Erkenntnis, daß eine Abkürzung der Methoden der Schwärzungsmessung photographischer Platten für diesen wie für viele andere Zwecke eine unabweisbare technische Forderung ist. Denn wenn auch das in der letzten Zeit zur Schwärzungsmessung allgemein benutzte Hartmannsche Mikrophotometer<sup>2)</sup>, gegebenenfalls mit kleinen Abänderungen<sup>3)</sup> jedes in der Praxis bisher aufgetauchte Problem der Schwärzungsmessung zu erledigen gestattet, so ist doch das Arbeiten mit ihm recht zeitraubend und anstrengend. Handelt es sich beispielsweise um die Ausmessung der Schwärzungsverteilung in einer einfachen Spektrallinie, die von Schleierschwärzung zur Schleierschwärzung etwa 0,3 mm breit ist, so benötigt selbst ein geübter Beobachter, wenn er, wie etwa erforderlich, die Schwärzung für Punkte bestimmt, die um je einige hundertstel Millimeter voneinander entfernt liegen und wenn er die Schwärzung jedes dieser Punkte dreimal einstellt, eine gute Stunde. Dazu kommt, vermutlich wegen der körnigen Struktur der zu beobachtenden Vergleichsfelder, ein verhältnismäßig rasches Nachlassen der Einstellgenauigkeit selbst bei angestrengter Aufmerksamkeit des Messenden. Photographisch-photometrische Untersuchungen an komplizierten Linienstrukturen, die sich

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909; 34. p. 377. 1911.

2) J. Hartmann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 97. 1899.

3) E. Lehmann, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. p. 335. 1911;  
P. P. Koch, Ann. d. Phys. 38. p. 507. 1912.

aus vielen Einzellinien zusammensetzen, wie komplizierte Zeemanzerlegungen, Spektrallinien mit Satelliten, Systeme von Fabry-Perot-Ringen oder gar linienreiche Spektren sind deshalb zurzeit außerordentlich mühsam, zumal man sich auf das Resultat einer einmaligen Durchmessung einer Struktur wegen hier und da vorkommender Unregelmäßigkeiten der photographischen Platte nicht unbedingt verlassen kann und Feinheiten in der Schwärzungsverteilung nur dann als reell ansprechen darf, wenn sie sich bei wiederholtem Durchmessen derselben Struktur an verschiedenen Stellen längs der Linien wiederholen.

Aus den genannten Gründen ist ein registrierendes Mikrophotometer gebaut worden, das die Arbeit der Schwärzungsmessung maschinenmäßig, also mit im Laufe der Arbeitszeit gleichbleibender Einstellgenauigkeit in einem Bruchteil der Zeit ausführt, die bisher dazu erforderlich war. Die dabei erreichte Zuverlässigkeit der Meßresultate geht aus Fig. 13 p. 743, sowie aus Tab. 8 p. 748 hervor, die zeigen, daß die Angaben des registrierenden Instrumentes, mit denen des Hartmannschen so gut übereinstimmen, wie man überhaupt erwarten kann. Da die praktische Brauchbarkeit des Instrumentes damit erwiesen ist und da das Instrument außerdem seit über einem halben Jahr völlig störungsfrei arbeitet, sollen die mit ihm gemachten Erfahrungen veröffentlicht werden. Die noch vorhandenen Unzulänglichkeiten, auf die an den geeigneten Stellen aufmerksam gemacht ist, und an deren Beseitigung noch gearbeitet wird, werden, wie es scheint, schon jetzt reichlich aufgewogen durch die enorme Zeitersparnis, die es gestattet, Resultate, zu deren Gewinnung ein einzelner Beobachter früher Wochen brauchte, nunmehr mühelos in wenigen Stunden festzulegen.

Die nachfolgende Beschreibung des Instrumentes befaßt sich im wesentlichen nur mit der zurzeit im Dauergebrauch befindlichen Form der Anordnung, da ein Eingehen auf die Versuche, die den erwarteten Erfolg nicht hatten, zu weit führen würde.

## § 2. Schema der Anordnung.

Das Prinzip der Anordnung besteht darin, daß die photographische Platte *P* (Fig. 1), deren Schwärzung aufgezeichnet

werden soll, zwischen einer Nernstlampe  $N$  und einer lichtelektrischen Zelle  $Z_1$  unter Zwischenschaltung einer Beleuchtungslinse  $B$  und eines Mikroskopobjektivs  $M$  nebst Spaltblende  $Sp$  mit Hilfe eines Uhrwerkes vorbeigezogen wird. Die mit Kalium überzogene Elektrode  $K$  der Zelle, die von dem durch die Platte  $P$  durchtretenden Licht getroffen wird, ist mit dem negativen Pol einer Batterie kleiner Akkumulatoren  $A$  verbunden, deren positiver Pol geerdet ist. Von der anderen Elektrode der Zelle führt eine Leitung zu einem Saiten-elektrometer  $S$  und von dort über eine zweite lichtelektrische

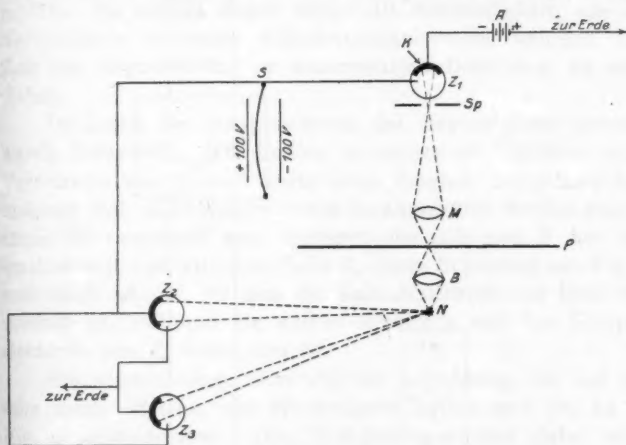
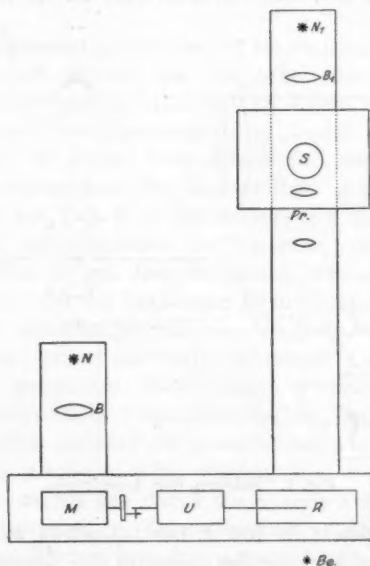


Fig. 1. Schema der Anordnung.

Zelle  $Z_2$ , die gleichfalls von  $N$  her beleuchtet wird, zur Erde. Je nach der Schwärzung der zwischen der Nernstlampe  $N$  und der lichtelektrischen Zelle  $Z_1$  stehenden Stelle der Platte  $P$  und damit je nach der Intensität des auf die Zelle auffallenden Lichtes fließt ein elektrischer Strom wechselnder Stärke von der Akkumulatorenbatterie  $A$  über die Zelle  $Z_1$  und die Ableitungszelle  $Z_2$  zur Erde. Die Spannung, auf die sich dabei die Saite des Elektrometers  $S$  auflädt, und also auch die Einstellung dieser Saite selbst ist das Maß für die Schwärzung der Platte  $P$ . Die Registrierung der Bewegung der Saite erfolgt dann in der üblichen Weise auf photographischem

Wege. Dazu wird ein kleines Stück der Saite auf eine photographische Platte (im folgenden kurz Registrierplatte genannt) abgebildet, die mittels desselben Uhrwerkes, das die auszumessende Platte  $P$  verschiebt, ihrerseits senkrecht zur Bewegungsrichtung der Saite in geeignetem Tempo vorbeigezogen wird.

Die Benutzung der von der gleichen Lichtquelle wie  $Z_1$  beleuchteten Ableitungszelle  $Z_2$  hat gegenüber der Verwendung eines Bronsonwiderstandes den Vorzug, daß Schwankungen in



$N$  = Nernstlampe zur Beleuchtung der auszuphotometrierenden Platte  
 $B$  = Beleuchtungslinse. Betr. Einzelheiten des Strahlenganges vgl. Fig. 4.

$M$  = Mikroskop mit lichtelektrischer Zelle  $Z_1$ .

$U$  = Uhrwerk zum Verschieben von auszumessender u. Registrierplatte.

$R$  = Registriereinrichtung.

$S$  = Saitenelektrometer mit Projektionsmikroskop  $Pr.$

$N_1$  = Nernstlampe u.  $B_1$  = Beleuchtungslinse für die Elektrometersseite.

$Be$  = Sitz des Beobachters.

Fig. 2. Schematischer Grundriß des registrierenden Mikrophotometers.

der Lichtstärke der Lichtquelle die Einstellung des Elektrometers nicht oder doch nur in stark herabgemindertem Maße beeinflussen, da, zumal bei Verwendung möglichst gleichartiger Zellen, eine Änderung der Lichtstärke von  $N$  den „Widerstand“ von  $Z_1$  und  $Z_2$  in gleichem Verhältnis ändert. Dadurch entfällt die Notwendigkeit, während des Registrierens die Konstanz der elektrischen Belastung der Nernstlampe zu kontrollieren, was bekanntlich deswegen verhältnismäßig genau geschehen mußte, weil kleine Belastungsänderungen große Schwankungen in der Lichtstärke der Nernstlampe bedingen (vgl. Kurve 7 p. 733). Es entfällt damit weiter die Notwendigkeit, die die Nernstlampe speisende Akkumulatorenbatterie während der Zeit des Registrierens der anderweitigen Benutzung zu entziehen.

Im Laufe des Ausprobierens des Registrierinstrumentes wurde festgestellt, daß die bei momentanem Belichten oder Verdunkeln von  $Z_1$  noch vorhandene Trägheit der ganzen Anordnung (vgl. p. 724) noch etwas herabgedrückt werden konnte durch Hinzunehmen einer weiteren ebenfalls von  $N$  her beleuchteten lichtelektrischen Zelle  $Z_3$ , deren Schaltung aus Fig. 1 ersichtlich ist, bei der also die Kaliumelektrode zur Erde abgeleitet ist, während die andere Elektrode mit der Kaliumelektrode von  $Z_2$  verbunden ist.

Ein schematischer Grundriß der Anordnung, die auf ein sehr solides System von Eisenträgern aufmontiert ist, ist in Fig. 2 aufgezeichnet. Die Drahtleitungen sind dabei weggelassen. Die Dimensionen sind, soweit wesentlich, in § 3 mitgeteilt.

### § 3. Einzelheiten der Anordnung.

#### Die lichtelektrischen Zellen.

Nachdem eine Reihe von Versuchen, die Registrierung der Schwärzung photographischer Platten mit Selenzelle und Saitengalvanometer durchzuführen, wegen der Trägheit des Selens unbefriedigend ausgefallen war, ging man zur Benutzung lichtelektrischer Zellen und des Saitenelektrometers in der im vorhergehenden Paragraph beschriebenen Schaltung über.

Die ersten Zellen wurden in liebenswürdigster Weise von den Herren Elster und Geitel leihweise für die Vorversuche

zur Verfügung gestellt. Als diese einen günstigen Erfolg hatten, wurden dann von beiden Herren zwei weitere Zellen aus Uviolglas für die definitive Einmontierung in das Instrument angefertigt. Für ihr Entgegenkommen bin ich den Herren Elster und Geitel zu bestem Dank verpflichtet. Inzwischen angestellte Versuche, die lichtelektrischen Zellen nach der bis ins einzelne ausgearbeiteten Beschreibung von Elster und Geitel<sup>1)</sup> selbst herzustellen, gelangen ohne Schwierigkeit, so daß schließlich etwa zehn Zellen zur Probe zur Verfügung standen.

Sämtliche Zellen haben die übliche kugelige Form mit drei Ansätzen<sup>2)</sup>, in deren einen die bei der Benutzung mit dem + Pol der Batterie zu verbindende Elektrode eingeschmolzen ist, während die beiden anderen nur bei der Herstellung der Zellen benutzt werden. Der Kugeldurchmesser aller Zellen beträgt rund 4 cm. Als lichtelektrisches Metall dient Kalium, das nach dem Verfahren von Elster und Geitel<sup>3)</sup> an der Oberfläche in die Kolloidmodifikation von Kaliumhydrid umgewandelt ist. Die Gasfüllung besteht bei der einen der zuerst geliehenen Zellen aus Helium, bei der anderen aus Wasserstoff, bei den übrigen aus Argon. Dabei ist der Gasdruck der Zellen so einreguliert, daß sie ungefähr ein Optimum der lichtelektrischen Wirkung ergeben.

Die Zellen  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  der Fig. 1 sind sämtlich solche mit Argonfüllung und zwar sind  $Z_1$  und  $Z_2$  die Uviolglaszellen von Elster und Geitel,  $Z_3$  ist eine selbst hergestellte Zelle.

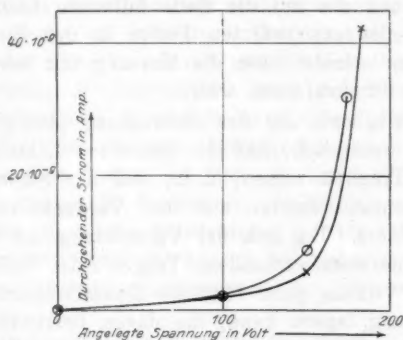
In Fig. 3 sind für zwei der untersuchten Zellen die Spannungs-Stromcharakteristiken dargestellt, die bei allen Zellen, mit Ausnahme der mit Wasserstoff gefüllten, im wesentlichen ähnlich verlaufen. Abszissen sind angelegte Spannungen in Volt, Ordinaten Stromstärken in Ampere. Die Zellen waren bei Aufnahme der Charakteristik beleuchtet aus 50 cm Entfernung mit einer 2 Volt-Metallfadenlampe, die mit rund 1 Amp. belastet war und die, auf eine Hefnerlampe bezogen, 1,8 Kerzen lieferte. Der Glimmstrom im Dunkeln setzte bei der Zelle

1) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 12. p. 609. 1911.

2) Vgl. Fig. 1 bzw. 3 der eben zitierten Abhandlung.

3) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 11. p. 257. 1910.

von Elster und Geitel ein mit 186 Volt, bei der selbst verfertigten mit 188 Volt. Jedoch ist es vorteilhaft, bei Verwendung der Zellen etwa 10 Volt unterhalb der Glimmstromspannung zu bleiben, da der die Zellen durchfließende Strom andernfalls Schweidlersche Schwankungen zeigt, die beim Messen stören.



× Uviolglaszelle mit Argonfüllung von Elster und Geitel.

○ Selbsthergestellte Zelle mit Argonfüllung.

Fig. 3. Zusammenhang zwischen angelegter Spannung und durchgehendem Strom für zwei der benutzten lichtelektrischen Zellen.

Über die bei den Schwärzungsmessungen verwandten Stromstärken, die wegen der zur Beleuchtung von  $Z_1$  (Fig. 1) verfügbaren Lichtmengen (vgl. § 3) wesentlich kleiner sind als die bei Aufnahme der Spannungs-Stromcharakteristik benutzten, stehen Angaben auf p. 714.

Einschaltend ist zu bemerken, daß es für die Verwendung lichtelektrischer Zellen zur Schwärzungsmessung unwesentlich ist, ob der Strom bei konstanter angelegter Spannung proportional ist zu dem auf die Zellen auffallenden Licht, sobald man, wie es bei der auf den Hartmannschen Satz<sup>1)</sup> basierten Methode der photographischen Photometrie (Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909; 34. p. 377. 1911) der Fall ist, nur die Schwärzung der zu photometrierenden Erscheinungen auf

1) J. Hartmann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 97. 1899.



die der Intensitätsmarken bezieht. Ist man andererseits der Proportionalität zwischen Strom und Licht sicher, woran nach den Untersuchungen von Elster und Geitel<sup>1)</sup> kaum zu zweifeln sein dürfte, so bietet die lichtelektrische Zelle ein außerordentlich bequemes Mittel, um Schwärzungen auch absolut zu messen, wobei allerdings darauf zu achten wäre, daß die spektrale Zusammensetzung des auf die Zelle fallenden Lichtes durch das Einfügen der geschwärzten Platte in den Strahlengang keine Änderung erleidet bzw. die Messung mit monochromatischem Licht durchzuführen wäre.

Für die Registrierung der Schwärzung photographischer Platten ist es wesentlich, daß die benutzten lichtelektrischen Zellen keine Trägheit zeigen, d. h., daß der Strom bei Belichtung momentan einsetzt und bei Verdunkelung ebenso momentan aufhört. Da sich bei Verwendung der Schaltung Fig. 1 über eine etwa vorhandene Trägheit der Zellen selbst, eine in ihrer Wirkung ganz ähnliche Einstellungsträgheit der Gesamtanordnung lagern kann, die davon herrührt, daß die mit den großen Widerständen  $Z_1$  und  $Z_2$  verbundene Kapazität von Elektrometer und Zuleitungen auf ein bestimmtes Potential geladen werden muß, wird über die diesbezüglichen Tatsachen erst im § 4 berichtet. Dortselbst finden sich auch die Einzelheiten über die Kompensationswirkung der Schaltung gegenüber Schwankungen der Lichtstärke der Nernstlampe.

#### Stromkreis und Elektrometer.

Als Stromquelle  $A$  (Fig. 1) dient eine Bornhäusersche Batterie von 100 kleinen Akkumulatoren, deren + Pol geerdet ist und von deren - Pol Spannungen bis 200 Volt von 2 zu 2 Volt abgenommen werden können. Zwischen Batterie und Zelle ist ein Sicherheitsdrahtwiderstand von  $10^6$  Ohm eingeschaltet für den Fall des Einsetzens der Glimmentladung. Der Stromkreis von der Zelle  $Z_1$  an, diese mit eingeschlossen, ist durch geerdete Metallhüllen elektrostatisch geschützt. Alle Isolationen bestehen aus natürlichem Bernstein. Die Zelle  $Z_1$  sitzt in einem parallelepipedischen durch metallisches Natrium

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 48. p. 625. 1893.



getrocknetem Metallkästchen, das auf das Mikroskop *M* (Fig. 1 bzw. 2) aufgesteckt werden kann. Einzelheiten darüber vgl. p. 717. Ein die Kaliumelektrode umgebender, auf die Glasfläche aufgeklebter, geerdeter Schutzring aus Stanniol leitet Elektrizitätsmengen, die etwa auf das Glas überkriechen, zur Erde ab. Die Leitung von der Zelle zum Elektrometer ist in ein leichtes Aluminiumrohr verlegt, um das Mikroskop *M* möglichst wenig zu belasten. Das Elektrometer steht in einem großen Blechkasten mit abhebbarem Deckel. Auf der dem Mikroskop *M* zugewandten Seite des Blechkastens sind die Ableitungszellen  $Z_2$  und  $Z_3$  in ein besonderes, gleichfalls mit metallischem Natrium getrocknetes Blechkästchen mit Glasfenster einmontiert, so daß sie durch Licht, das von der Nernstlampe *N* herkommt, bestrahlt werden können (Einzelheiten über die Beleuchtung p. 718). Ein vom Sitz des Beobachters aus (*Be* Fig. 2) betätigbarer Schlüssel gestattet, die Saite des Elektrometers zu erden bzw. von Erde zu isolieren.

Das Elektrometer selbst ist ein solches nach Cremer-Edelmann, dessen vertikalstehender Faden von 0,006 mm Dicke zwischen zwei einzeln für sich justierbaren Schneiden aufgespannt ist. Die Schneiden werden mittels einer Batterie Bornhäuserscher kleiner Akkumulatoren auf + 100 Volt bzw. - 100 Volt geladen.

Mit Hilfe eines Zeissmikroskops mit Objektiv *A* (Äquivalentbrennweite 15 mm, freier Objektivaabstand 9 mm) und Projektionsokular 4 wird das Bild eines Stückes der Saite unter Zwischenschaltung einer Zylinderlinse von 11 mm Brennweite auf die in *R* befindliche Registrierplatte entworfen. Die Zylinderlinse, die mit ihrer Achse horizontal liegt, bewirkt dabei, daß das Bild des Fadens in vertikaler Richtung möglichst zusammengezogen wird. Der Abstand vom Okularende des Mikroskops zur Zylinderlinse ist etwa 110 cm, von der Zylinderlinse zur Registrierplatte ca. 1 cm. Die Vergrößerung, mit der die Saite auf die Registrierplatte projiziert wird, ist etwa 290 fach. Die Empfindlichkeit des Elektrometers wird meist so gewählt, daß 1 Volt Spannung rund 1—2 cm projizierten Ausschlag auf der Registrierplatte liefert. Proportionalität zwischen Spannung und Ausschlag ist aus den

p. 711 genannten Gründen nicht erforderlich, im übrigen vorhanden.

Unter den besprochenen Umständen und der benutzten Beleuchtungsstärke der Zellen  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  (vgl. unten) entspricht einem Millimeter Ausschlag der projizierten Saite ein Strom von rund  $3 \cdot 10^{-11}$  Amp., wie durch Messung mit einem eingeschalteten Saitengalvanometer festgestellt wurde. Der maximal benutzbare Ausschlag der projizierten Saite beträgt, da die Registrierplatte 9 cm breit ist, etwa 7—8 cm, entsprechend einer Aufladung der Elektrometersaite auf ca. 6 Volt. Da hierbei Spannungen von ca. 180 Volt an die Zelle  $Z_1$  angelegt sind, ergeben sich die Widerstände von  $Z_1$  bzw. von  $Z_2$  mit  $Z_3$  zu ca.  $9 \cdot 10^{10}$  Ohm bzw.  $3 \cdot 10^9$  Ohm. Es kommt also der Hauptspannungsabfall und der Hauptwiderstand auf die Zuleitungszelle  $Z_1$ , was damit zusammenhängt, daß bei der gegebenen Lichtquelle (Nernstlampe vgl. p. 715) und dem gegebenen Strahlengang im Mikroskop  $M$  (Fig. 1 u. 2), vgl. auch p. 716 und folgende, eine schließlich nur noch verhältnismäßig geringe Lichtmenge auf  $Z_1$  auffällt.

Die Kapazität des Systems, bestehend aus Zelle  $Z_1$ , Zuleitung zum Elektrometer, Elektrometer, Leitung zu den Ableitungszellen  $Z_2$  und  $Z_3$ , diese letzteren mit eingeschlossen, liegt im wesentlichen in der als Zylinderkondensator wirkenden Leitung von  $Z_1$  zum Elektrometer und wurde durch eine Vergleichung mit einem Kondensator bekannter Kapazität zu 35 cm bestimmt.

#### Beleuchtung und Abbildung der auszumessenden Platte.

Da durch den gleich zu besprechenden Strahlengang das Licht auf dem Wege von der Quelle zur Zelle beträchtlich geschwächt wird, konnte als Lichtquelle nur eine solche mit großer Flächenhelligkeit in Betracht kommen, denn einmal wächst mit der Beleuchtungsstärke der Zellen der lichtelektrische Strom und damit treten Störungen durch etwaige mangelhafte Isolation und andere derartige Fehlerquellen in entsprechendem Verhältnis zurück und dann verringert sich die schon erwähnte Einstellungsträgheit der Gesamtanordnung (vgl. p. 724) mit wachsender Beleuchtung und abnehmendem Widerstand der Zellen.

Leider ist die irdische Lichtquelle größter Flächenhelligkeit, nämlich der Krater des elektrischen Lichtbogens, zeitlich wie hauptsächlich örtlich nicht so konstant, daß man ihn ohne Umständlichkeiten zum Registrieren benutzen könnte. Denn wenn auch die Kompensationsschaltung (Fig. 1) Schwankungen in der Lichtstärke des örtlich ruhig stehenden Kraters in beträchtlichem Maße kompensieren kann (vgl. p. 733), so bewirkt das Wandern des Kraters wegen der Verschiedenheit des Strahlenganges zur Zuleitungszelle  $Z_1$  und den Ableitungszellen  $Z_2$  und  $Z_3$  leicht, daß sich die Beleuchtung der Zellen nicht im gleichen Verhältnis ändert, wodurch naturgemäß eine Kompensation nicht mehr eintritt. Immerhin war bei einigen Proben unter Benutzung des Lichtbogens die Einstellung der Gesamtanordnung und damit die Einstellung der Saite bei momentanem Belichten bzw. Verdunkeln der Zuleitungszelle  $Z_1$  eine derartig rasche und exakte, daß die Versuche mit dem Lichtbogen unter Verwendung eines geeigneten Strahlenganges gelegentlich fortgesetzt werden sollen.

Wegen der Einfachheit der Handhabung wird inzwischen als Lichtquelle  $N$  (Fig. 4) eine 32 kerzige Nernstlampe mit geradem Stift verwandt und zwar zur Erhöhung der Flächenhelligkeit mit Belastung von ca. 120 Volt, obwohl nur für eine Belastung mit 110 Volt bestimmt. Die etwaigen Schwankungen in der Lichtstärke der Nernstlampe, die mit einer derartigen Überlastung verbunden sind, werden durch die Kompensationsschaltung (Fig. 1) vollkommen unschädlich gemacht, solange sie sich gleichmäßig über die Gesamtfläche des Nernststiftes erstrecken. Wesentlich ungünstiger wird die Sachlage dagegen, wenn die Intensitätsschwankungen des Stiftes lokaler Natur sind. Denn da, wie im folgenden auseinandergesetzt,

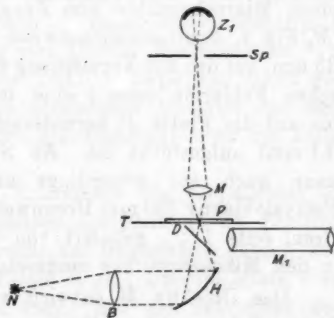


Fig. 4. Schema der Beleuchtung und Abbildung der auszumessenden Platte.

die Zuleitungszelle  $Z_1$  nur von einem kleinen Teil des Stiftes ihr Licht erhält, während die Ableitungszellen vom ganzen Stift bestrahlt werden, können solche Schwankungen nicht kompensiert werden, wodurch die Einstellung des Elektrometerfadens gestört wird. Lokale Intensitätsschwankungen scheinen bei länger gebrannten Nernststiften öfters vorzukommen, während sie bei frischen, wenigstens soweit die bisherigen Erfahrungen reichen, fehlen. Da man sich also leicht vor derartigen Störungen schützen kann, wurde vorläufig von einer Komplizierung des optischen Strahlenganges abgesehen, durch die man die Störung gleichfalls ohne Schwierigkeit beseitigen könnte.

Der Nernststift  $N$  wird mittels der Lupe  $B$  (Fig. 4) von 11 cm Brennweite sowie des unter dem Tisch des Mikroskops  $M$  befindlichen allseitig verstellbaren Hohlspiegels  $H$  auf die auf dem Tisch  $T$  liegende auszumessende Platte  $P$  ungefähr in Originalgröße ( $0,3 \times 10$  mm) abgebildet. Der Tisch wird beim Registrieren senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 4 verschoben vgl. darüber p. 720).

Das aus der Platte  $P$  austretende Licht fällt auf ein in einen Mikroskoptubus von Zeiss eingesetztes Zeissobjektiv  $a$ , ( $M$ , Fig. 4, Äquivalentbrennweite 28 mm, freier Objektivaabstand 33 mm) auf das zur Vermeidung des Schwarzschild-Villigerischen Fehlereinflusses<sup>1)</sup> eine in der Figur nicht gezeichnete bis auf die Platte  $P$  herunterschiebbare Plattenblende ( $2,0 \times 0,1$  mm) aufgesteckt ist. An Stelle des genannten Objektivs kann auch ein neuerdings angeschafftes sehr lichtstarkes Petzvalobjektiv (30 mm Brennweite, Verhältnis von Öffnung zur Brennweite 1:2), geliefert von der Firma Busch-Rathenow, in den Mikroskoptubus eingesetzt werden.

Das Objektiv  $M$  entwirft von der zu photometrierenden Platte  $P$  in ca. 16 cm Entfernung vom Objektiv, ein ca. fünf-fach vergrößertes Bild auf einen Spalt  $Sp$ , hinter dem die lichtelektrische Zelle  $Z_1$  in dem schon erwähnten Kästchen (vgl. p. 712) sich befindet.

1) K. Schwarzschild u. W. Villiger, *Astrophys. Journ.* 23. p. 284. 1906; P. P. Koch, *Ann. d. Phys.* 30. p. 860. 1909.

Die Spalte *Sp* sind leicht austauschbar. Sie sitzen je in einem Rohrstück, das nach Art der Okulare in den Mikroskoptubus eingesetzt werden kann. Durch einen kleinen, außen auf das Rohrstück senkrecht zu dessen Längsrichtung aufgesteckten Stift, der genau in einen in den Mikroskoptubus eingefeilten Längsschlitz paßt, wird bewirkt, daß der Spalt beim Einsetzen des Rohrstückes stets die gleiche Lage zum Mikroskoptubus erhält. Das den Spalt enthaltende Rohrstück trägt seinerseits wieder einen Längsschlitz, in den das die lichtelektrische Zelle  $Z_1$  enthaltende Kästchen (vgl. p. 712) gleichfalls mit Rohrstück und Stift eng hineinpaßt, so daß auch eine stets gleichbleibende Orientierung der Zelle gegen den Spalt gewährleistet ist.

Insgesamt sind drei in der genannten Art montierte Spalte vorhanden und zwar sind ihre Dimensionen bzw.  $0,15 \times 2,0$  mm,  $0,06 \times 7,5$  mm und  $0,02 \times 2,5$  mm, so daß sie also wegen der fünffachen Vergrößerung des Objektivs  $a_3$  am Ort der zu photometrierenden Platte Flächenstücke von den bzw. Dimensionen:  $0,03 \times 0,4$  mm,  $0,01 \times 1,5$  mm und  $0,004 \times 0,5$  mm herausblenden. Da die vom Objektiv  $a_3$  nach dem Spalt hinlaufenden Lichtbündel sich in diesem unter sehr spitzem Winkel schneiden und die Zelle  $Z_1$  dicht hinter dem Spalt steht, wird trotz der Beugung des Lichtes besonders an den engeren Spalten nur ein kleiner Teil der Zelle von Licht getroffen. Durch Auflegen eines Stückchens Mattglas auf den Spalt kann das verfügbare Licht gleichmäßiger über die Zelle verteilt werden.

Die Spalte sind in ihre Rohrstücke ein für allemal so einmontiert, daß sie beim Einsetzen der Stifte in die Schlitz mit ihrer Längsrichtung senkrecht zur Bewegungsrichtung des Tisches stehen, auf dem die Platte liegt. Um die letztere so auf den Tisch bringen zu können, daß sie mit einer gewünschten Richtung, beispielsweise der Längsrichtung auszu-photometrierender Spektrallinien parallel zum Spalt, also senkrecht zur Zugsrichtung des Tisches steht, kann nach Wegnahme von Spalt und lichtelektrischer Zelle ein mit einem Faden versehenes Zeissokular 4 mit Stift in den Führungsschlitz eingesetzt werden. Der Faden ist so hinjustiert, daß er mit seiner Längsrichtung parallel zum Spalt läuft und

außerdem mit dem Ort des Spaltes zusammenfällt. Es genügt also, eine auszuphotometrierende Spektrallinie unter Benutzung des Okulars 4 scharf einzustellen und mit ihrer Längsrichtung zum Faden parallel zu legen. Dann steht nach Einsetzen des Spaltes dieser in dem vom Objektiv entworfenen scharfen Bild der Platte und zwar parallel zu der senkrecht zur Zugsrichtung des Tisches liegenden Spektrallinie. Da beim Orientieren die auf das Objektiv  $a_3$  aufgesteckte Plattenblende das Gesichtsfeld in störender Weise beschränkt, kann ein weiteres Objektiv  $a_3$  jedoch ohne Plattenblende mittels Revolvers eingeschaltet werden.

Um bei längeren Meßreihen, die aufeinander bezogen werden sollen, der Notwendigkeit überhoben zu sein, zwecks Orientierung der auszumessenden Platten an der Einstellung des die lichtelektrische Zelle tragenden Mikroskops irgend etwas ändern zu müssen und um auch während des Registrierens das Fortrücken der auszumessenden Platte verfolgen zu können, ist unter den Tisch  $T$  (Fig. 4) ein schwach vergrößerndes Hilfsmikroskop  $M_1$  mit sehr großem Gesichtsfeld angebracht (Zeissobjektiv  $a^*$ , Okular 1), mit dem im planparallelen Glasblättchen  $D$  ein großes Stück der Platte überblickt werden kann. Ein Fadenkreuz im Hilfsmikroskop ist so einjustiert, daß beispielsweise eine Spektrallinie, die sich mit ihrer Längsrichtung mit dem Längsfaden des Kreuzes deckt, durch das Objektiv  $a_3$  des Hauptmikroskops  $M$  genau auf den Spalt  $Sp$  abgebildet wird, und zwar so, daß der Teil der Linie, der auf dem Mittelpunkt des Fadenkreuzes des Hilfsmikroskops liegt, auch auf die Mitte des Spaltes  $Sp$  fällt. Um beim Orientieren der auszumessenden Platte durch das von ihr zurückgestrahlte Licht des Nernststiftes nicht geblendet zu werden, kann zwischen Beleuchtungslinse  $B$  und Hohlspiegel  $H$  eine geeignet gestaltete Blende vorgeklappt werden.

Die beiden Ableitungszellen  $Z_2$  und  $Z_3$  (Fig. 1) empfangen ihr Licht von der Nernstlampe  $N$  mit Hilfe eines kleinen dem Nernststift außerhalb der Linie  $N.B.H.P$  (Fig. 4) gegenüberstehenden, geeignet orientierten, hinten versilberten Planspiegels. In diesen Strahlengang kann gewünschtenfalls zur Lichtkonzentration eine Sammellinse bzw. zur Lichtschwächung eine Blende eingeschaltet werden.

Sämtliche Strahlengänge der optischen Anordnung sind so weit eingebaut, daß sie sich gegenseitig kein störendes Licht zusenden können.

#### Die Registriereinrichtung.

Die Registrierung von Schwärzungsverteilungen erfolgt, wie schon p. 707 kurz erwähnt, in der Weise, daß das Uhrwerk *U* (Fig. 2) den Tisch des Mikroskops *M*, der die auszumessende Platte trägt, unter dem Mikroskopobjektiv vorbeischiebt, während sich gleichzeitig von demselben Uhrwerk betätigt, die in dem Aufbau *R* befindliche, zur Aufnahme der Schwärzungskurve bestimmte „Registrierplatte“ vertikal herabsenkt. Da der auf die Registrierplatte projizierte Faden des Saitenelektrometers mit wechselnder Schwärzung der auszumessenden Platte in horizontaler Richtung hin und her wandert, entsteht aus der Kombination dieser Horizontalbewegung mit der vertikalen der Registrierplatte die Kurve des Schwärzungslaufes.

Das benutzte Uhrwerk ist sehr kräftig gebaut und von E. H. Wolf, Glashütte Sachsen, geliefert. Seine Ganggeschwindigkeit kann durch eine Magnetbremsung in weiten Grenzen reguliert werden, und zwar so, daß im langsamst möglichen Fall die auszumessende Platte um 1 mm in 2—3 Min. vorgeschoben wird. Anlaufenlassen oder Anhalten erfolgt durch Abrücken oder Andrücken eines Metallbandes von oder gegen die zwischen den Magnetpolen rotierende Metallscheibe der Bremsung. Das Uhrwerk trägt auf der dem Mikroskop zugewandten Seite einen Zapfen, der mittels eines senkrecht zu ihm festklemmbaren Mitnehmerstiftes die Schraube des Mikroskoptisches dreht, auf der anderen Seite eine Rolle, von der sich ein solider, aber doch leicht biegsamer Faden abwickelt, an welchem, nachdem er über zwei weitere Führungsrollen gelaufen ist, die Registrierplatte in einem Rahmen (vgl. p. 720) hängt.

Man hat durch die geschilderte Art der Fortbewegung von auszumessender und Registrierplatte durch dasselbe Uhrwerk den bekannten Vorteil, daß Änderungen in der Ganggeschwindigkeit des letzteren das Verhältnis des Fortrückens von auszumessender und Registrierplatte (das Übersetzungs-



verhältnis) nicht beeinflussen. Dagegen liegt die Möglichkeit vor, daß unter den benutzten Umständen das Übersetzungsverhältnis aus anderen Gründen nicht konstant ist, daß also gleichen Strecken auf der auszumessenden Platte nicht gleiche Strecken auf der Registrierplatte entsprechen, weil es wegen der gewünschten Größe des Übersetzungsverhältnisses nicht möglich war, die Bewegung beider Platten direkt von derselben Achse aus ohne Zwischenschaltung von Übersetzungsradern zu betätigen. Die Verwendung des Uhrwerkes bringt es weiter mit sich, daß das Verschieben beider Platten nicht völlig gleichmäßig, sondern wegen der Zähne in den Rädern mit kleinen Rucken vor sich geht. Man bemerkt dies an den Registrierplatten, die infolgedessen senkrecht zur Fortbewegungsrichtung in mehr oder minder regelmäßiger Weise gestreift sind (vgl. die Reproduktionen p. 727, 728, 738, 739, 741, 746 und 747). Nach allem ist es zweifelhaft, ob es nicht von Vorteil gewesen wäre, an Stelle des Uhrwerkes einen kleinen Elektromotor zu benutzen, zumal man mit diesem den Vorteil hätte, zwecks Eliminierung gewisser Fehlerquellen beim Registrieren, den Bewegungssinn der auszumessenden Platte in einfachster Weise umkehren zu können.

Der die auszumessende Platte tragende Tisch des Mikroskops *M* ist p. 716 schon kurz erwähnt. Seine Dimensionen sind  $11 \times 13$  cm, die Ganghöhe der den Tisch verschiebenden Schraube ist 0,303 mm, die ausnutzbare Schraubenlänge ca. 20 mm.

Als Material zur Aufnahme der zu registrierenden Schwärzungskurven werden photographische Trockenplatten des Formats  $9 \times 12$  cm benutzt, die gegenüber der Verwendung von Negativpapier oder Films den Vorteil bieten, daß sie bei der Behandlung weniger zu Verzerrungen neigen. Will man anderseits längere Spektren mit größerem Übersetzungsverhältnis ausphotometrieren, so wird man es vorziehen, mittels einer geeigneten Vorrichtung auf Negativpapier oder Films zu registrieren, um das immerhin etwas lästige öftere Auswechseln der Registrierplatten zu vermeiden.

Die Registrierplatte wird mit der längeren (12 cm langen) Kante vertikalstehend ohne Benutzung einer Kassette bei Verdunkelung des Zimmers direkt in den durch das Uhrwerk



(vgl. p. 719) bewegten Rahmen eingesetzt und durch eine federnde Klammer gegen dessen dem Elektrometer zugewandte Seite angedrückt. Der Rahmen gleitet zwischen zwei vertikalen Führungsschienen. Das Ganze sitzt in einem lichtdichten Eichenholzkasten, der auf seiner dem Elektrometer zugewandten Seite einen Schlitz trägt, in dem die Zylinderlinse (vgl. p. 713) befestigt ist. Auf der entgegengesetzten Seite ist eine Tür angebracht zum Einsetzen bzw. Herausnehmen der Registrierplatten. Will man nicht ganze Schwärzungskurven registrieren, sondern bloß die den einzelnen Schwärzungen entsprechenden Elektrometerrausschläge ablesen, dann setzt man in den Rahmen eine Mattscheibe mit aufgeklebtem Millimetermaßstab.

Um auch während des Ganges der Registrierung den Faden des Saitenelektrometers vom Sitze des Beobachters (*Be*, Fig. 2) aus verfolgen zu können, ist auf der vom Beobachter abgewandten Seite des Eichenholzkastens dicht oberhalb der Zylinderlinse eine Papierskala angebracht, auf die sich ein langes Stück der Saite projiziert. Durch einen oberhalb des Eichenholzkastens angebrachten Spiegel kann Skala nebst Saite von *Be* aus überblickt werden.

Dicht bei der Zylinderlinse steht in der Gegend ihres einen Endes ein dünner Metalldraht, der beim Registrieren eine nahe bei der Längskante der Registrierplatte gelegene und dieser im allgemeinen ungefähr parallel laufende Gerade zieht. Da die Zylinderlinse mit ihrer Längsachse senkrecht zur Bewegungsrichtung des die Registrierplatte tragenden Rahmens steht, so bildet die eben genannte durch den projizierten Metalldraht gezogene Gerade auf der Registrierplatte (die Registrierlinie) die Abszisse, von der aus die Ordinaten der registrierten Schwärzungskurve in senkrechter Richtung zu rechnen sind. Es bleibt dabei ganz gleichgültig, wie die Registrierplatte während des Aufzeichnens der Schwärzungskurve im Rahmen gelegen hat. Natürlich darf sie sich nur während der Registrierdauer nicht verrückt haben. Durch die Benutzung der Registrierlinie erspart man sich also die Notwendigkeit, die Registrierplatte jedesmal gegen den sie tragenden Rahmen orientieren zu müssen.

Da der Faden des Elektrometers von ca. 0,006 mm Dicke

(vgl. p. 713) 290fach vergrößert auf die Registrierplatte abgebildet wird (vgl. p. 713), beträgt seine Breite am Ort der letzteren ca.  $1\frac{1}{2}$  mm. Obwohl die Empfindlichkeit der Anordnung es ohne weiteres ermöglichen würde, durch schwächere Vergrößerung des Fadens seine projizierte Breite wesentlich zu verringern, wurde doch die eben genannte Vergrößerung gewählt, weil andernfalls die registrierte Schwärzungskurve in denjenigen Teilen, in denen sie steil auf die Registrierlinie (vgl. p. 721) zu oder von ihr wegläuft, in der Richtung der Registrierlinie gemessen so schmal wird, daß sie im dunklen Hintergrund verschwindet. Denn die registrierte Schwärzungskurve kommt auf der entwickelten Platte als helle Linie auf dunklem Grunde zum Vorschein.

Als Übersetzungsverhältnis für das Fortbewegen von Registrierplatte und auszumessender Platte sind die Werte 7,65 und 46,4 vorhanden, die durch einfaches Ein- oder Ausrücken eines Rades am Uhrwerk gegeneinander ausgewechselt werden können. Es entsprechen also im ersten Falle 7,65 mm, im zweiten Falle 46,4 mm auf der Registrierplatte einem Millimeter auf der auszumessenden Platte und es finden im ersten Falle ca. 15 mm, im zweiten ca. 2,5 mm der auszumessenden Platte auf der 12 cm langen Registrierplatte Platz.

Wegen der p. 720 auseinandergesetzten Umstände liegt die Gefahr vor, daß das Übersetzungsverhältnis nicht völlig konstant ist, sondern während des Ablaufs des Uhrwerkes variiert, indem, wenn die Räder des Uhrwerkes nicht ganz exakt gearbeitet sind, das Verhältnis von dem jeweiligen Stand der Räder abhängen kann. Immerhin haben sich während der bisherigen Benutzung des Instrumentes bei öfterer Nachprüfung auch bei Verwendung kleinerer Strecken auf der auszumessenden Platte, bei denen sich unter Umständen derartige Fehler besonders leicht bemerkbar machen könnten; gröbere Abweichungen von den genannten Werten der Übersetzungsverhältnisse nicht ergeben. Die größten Abweichungen, die beispielsweise bei Bestimmungen des größeren Übersetzungsverhältnisses unter Benutzung von Strecken von etwa 0,5 mm auf der auszumessenden Platte gefunden wurden, betrugen  $\pm 1,5$  Proz. des angegebenen Wertes und waren etwas größer als die Größenordnung der dabei möglichen Meßfehler. Auf

die auszumessende Platte bezogen, könnten also durch diese Inkonstanz des Übersetzungsverhältnisses bei 0,5 mm Strecke Fehler von der Größenordnung eines hundertstel Millimeter entstehen, die für die vorläufig beabsichtigten Anwendungen des Instrumentes belanglos sind. Bei Bestimmung des Übersetzungsverhältnisses unter Verwendung größerer Strecken auf der auszumessenden Platte waren die Abweichungen für das Verhältnis durchwegs entsprechend kleiner, so daß auch bei Ausmessung größerer Strecken bis zu 2,5 mm, die gerade noch auf einer Registrierplatte Platz finden (vgl. p. 722), der Absolutbetrag des von der Inkonstanz des Übersetzungsverhältnisses möglicherweise herrührenden Fehlers 0,01 mm kaum übersteigen dürfte. Ähnlich liegen die Umstände beim kleineren Übersetzungsverhältnis. Auch hier ergibt sich sein Wert bei Zugrundelegen kürzerer Strecken auf der auszumessenden Platte von der Größenordnung der dabei möglichen Meßfehler. Bei größeren Strecken von etwa 3 mm an ist der Wert des Verhältnisses auf ca. 1 Proz. konstant. Der dadurch mögliche absolute Fehler für Auswertung von Abständen auf der auszumessenden Platte wird damit naturgemäß bei der kleinen Übersetzung größer als bei der größeren.

Zur Auswertung der registrierten Schwärzungskurven werden diese auf ein auf einer durchsichtigen Zelluloidplatte angebrachtes Millimeternetz aufgelegt und zwar derart, daß die Registrierlinie (vgl. p. 721) der auszuwertenden Platte sich exakt mit der einen Kante des Millimeternetzes deckt. Das Millimeternetz, geliefert von Schleicher & Schüll, Düren, ist an verschiedenen Stellen mittels einer Teilmaschine mit einem geeichten Millimeter verglichen und allenthalben bis auf einige hundertstel Millimeter also genügend genau richtig befunden. Bei der Ablesung der Koordinaten der Schwärzungskurven an dem Netz kann auf ein bis einige Zehntel Millimeter geschätzt werden, was bei der Rückrechnung der Abstände auf die auszumessende Platte beim größeren Übersetzungsverhältnis wieder zu einer Genauigkeit von rund 0,01 mm auf der letzteren führt, das ist gerade auch ungefähr die Fehlergrenze, die von einer möglichen Inkonstanz des Übersetzungsverhältnisses herrühren konnte.

## § 4. Ergebnisse.

## Trägheit der Anordnung.

Die ideale Forderung beim Registrieren der Schwärzung photographischer Platten müßte darauf hinausgehen, daß beim plötzlichen Belichten bzw. Verdunkeln der Zuleitungszelle  $Z_1$  (Fig. 1) die Saite des Elektrometers sich innerhalb unmerklich kurzer Zeit auf ihre Endlage einstellt.

Dies ist nun bei der besprochenen Anordnung leider nicht der Fall und auch die Größe der in Betracht kommenden Widerstände von Zu- und Ableitungszellen  $Z_1$  und  $Z_2$ , sowie der Kapazität des zwischen diesen befindlichen Systems gibt für die beobachtete Einstellungsverzögerung der Elektrometersaite keine Erklärung. Die Elektrometersaite für sich genommen, stellt sich, wie einfügend bemerkt sei, beim Erden bzw. bei direktem Anlegen von Spannung an die Saite ohne Zwischenschaltung von Widerständen in für das Auge un beobachtbar kurzer Zeit ein.

Zur Berechnung der zunächst bei plötzlichem Belichten der Zuleitungszelle auftretenden Einstellungsverzögerung der Anordnung aus dem Widerstand  $W_1$  der Zuleitungszelle  $Z_1$  (Fig. 1), dem Widerstand  $W_2$  der Ableitungszelle  $Z_2$  und der Kapazität  $C$  der zwischen den beiden Zellen befindlichen Leiter — der Widerstand der zu  $Z_2$  hinzugeschalteten Zelle  $Z_3$  ist praktisch unendlich groß — dient die Beziehung:

$$(1) \quad V = \frac{V_1 W_2}{W_1 + W_2} \left( 1 - e^{-t \frac{W_1 + W_2}{C \cdot W_1 \cdot W_2}} \right).$$

Dabei bedeutet  $V_1$  die an die Zelle  $Z_1$  angelegte konstante Spannung der Akkumulatorenatterie und  $V$  die Spannung des Elektrometers zur Zeit  $t$  unter der Bedingung, daß zur Zeit  $t = 0$  auch die Spannung  $V$  am Elektrometer Null war und daß zu diesem Zeitpunkt die vorher verdunkelte Zelle  $Z_1$  plötzlich belichtet wurde.

Die Zeit  $T$ , die erforderlich ist, damit der Ausschlag auf 1 Proz. seines Endwertes konstant wird, ergibt sich hieraus zu

$$(2) \quad T = \frac{4,7 \cdot C \cdot W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2}.$$

Setzt man hierin (vgl. p. 714)

$$C = 35 \text{ cm},$$

$$W_1 = 9 \cdot 10^{10} \text{ Ohm} = 10^{-1} \text{ elektrost. Einh.},$$

$$W_2 = 3 \cdot 10^9 \text{ „} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ elektrost. Einh.},$$

so wird  $T = 0,5 \text{ Sek.}$

Ganz analog berechnet sich die Zeit, innerhalb deren bei plötzlichem Verdunkeln der Zuleitungszelle  $Z_1$  das Elektrometer bis auf 1 Proz. seines Anfangsausschlages in die Ruhelage zurückkehrt zu

$$(3) \quad T_1 = 4,6 \cdot W_2 \cdot C,$$

also im vorliegenden Falle gleichfalls auf rund 0,5 Sek. Dabei ist angenommen, daß die Spannung des Elektrometers schließlich auf Null herabgeht, während es sich in Wirklichkeit auf eine kleine positive Spannung auflädt, die von der Differenz der lichtelektrischen Aufladungsspannungen der beiden Ableitungszellen  $Z_2$  und  $Z_3$  herrührt.

Bei den benutzten Bedingungen müßte somit unter der Voraussetzung, daß die lichtelektrischen Zellen selbst und zwar speziell die Zuleitungszelle — die Ableitungszellen sind ja dauernd belichtet — keine Trägheit besitzen, der Ausschlag des Elektrometers 0,5 Sek. nach Belichten bzw. Verdunkeln der Zuleitungszelle auf 1 Proz. seines ganzen Betrages konstant sein, was, wie erwähnt, keineswegs der Fall ist.

War beispielsweise die Zuleitungszelle einige Minuten lang verdunkelt, dann erhält man beim plötzlichen Belichten derselben mit einer Lichtstärke, wie sie etwa entsteht, wenn auf dem Objektisch sich eine Platte mit der Schwärzung<sup>1)</sup> 0,5 befindet, und die einen Strom von rund  $10^{-10} \text{ Amp.}$  liefert den in Tab. 1 dargestellten zeitlichen Gang der Elektrometer-

Tabelle 1.

Belichtungsträgheit nach langer Verdunkelung.

Zeit in Sekunden vom Beginn der Belichtung der Zuleitungszelle	}									
	0	5	10	15	30	60	120	180	240	300
Einstellung der Elektrometersaite in mm	69,2	19,3	17,8	17,3	16,3	15,5	14,8	14,2	13,9	13,9

1) Ist  $J$  die Intensität des auf die Platte einfallenden Lichtes,  $E$  die Intensität des durch die geschwärzte Stelle durchgegangenen Lichtes, dann ist die Schwärzung dieser Stelle  $S = \log J - \log E$ .

saite. In Kolonne 1 steht die Zeit in Sekunden gerechnet vom Beginn der Belichtung, in Kolonne 2 die Einstellung der Elektrometersaite in projizierten Millimetern.

Wesentlich günstiger werden die Verhältnisse, wenn vor Beginn der plötzlichen Belichtung die Zuleitungszelle nur einige Sekunden lang verdunkelt war, indem sich dann die Saite innerhalb weniger Sekunden auf ihre Endlage einstellt.

Beim Verdunkeln ist die Anordnung bedeutend weniger träge als beim Belichten, wie Tab. 2 zeigt. Die Werte sind aufgenommen, nachdem die Zuleitungszelle 15' lang unter Verhältnissen, die ungefähr denen der Tab. 1 entsprechen, belichtet war.

Tabelle 2.

Verdunkelungsträgheit nach langer Belichtung.

Zeit in Sekunden vom Beginn der Verdunkelung der Zuleitungszelle	}	0	5	10	15	30	60	120	180	240	300
Einstellung der Elektro- metersaite in mm		15,9	70,5	70,8	70,8	70,9	71,0	71,2	71,4	71,4	71,4

Auch beim Verdunkeln nimmt die Trägheit der Anordnung ab, wenn die Dauer der vorhergegangenen Belichtung kurz war. Die Werte der Tab. 1 und 2 sind unter Verwendung der Zelle  $Z_3$  in der Fig. 1 angegebenen Schaltung erhalten. Wird  $Z_3$  weggelassen, so ändert sich nichts an den Verhältnissen beim Belichten, dagegen wird die Verdunkelungsträgheit etwas größer, d. h. 5"; nach dem Verdunkeln steht die Saite noch etwa 2 mm von ihrer Endlage entfernt, anstatt um ca. 1 mm wie in Tab. 2.

In den Figg. 5 und 6 ist die Einstellung der Elektrometersaite bei plötzlichem Belichten bzw. Verdunkeln der Zuleitungszelle für verschiedene Verhältnisse von Vorbelichtung bzw. Vorverdunkelung direkt registriert. Einzelheiten stehen an den Figuren. Die zur Aufnahme benutzten Registrierplatten sind aus Ersparnisgründen billigstes Fabrikat, da Gleichmäßigkeit der Schicht keine Rolle spielt.<sup>1)</sup>

1) Die Figg. 5, 6, 9, 10, 12, 14 und 15 haben, wie üblich, bei der Reproduktion stark gelitten und geben nur einen mäßigen Eindruck von der erzielbaren Schärfe der Registrierkurven.

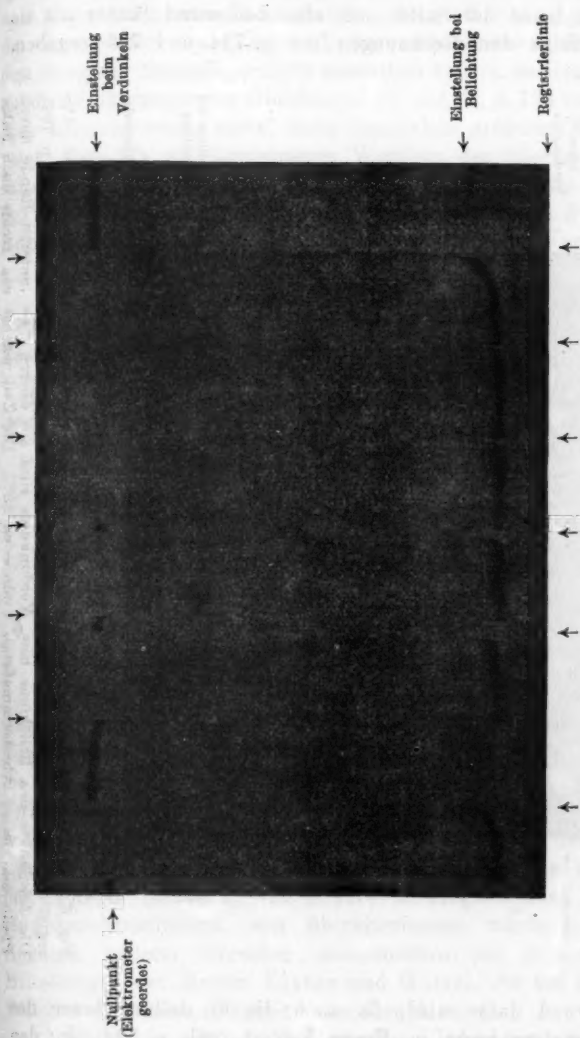


Fig. 5. Trägheit der Anordnung, aufgezeichnet mit dem registrierenden Mikrophotometer. Die registrierte Kurve ist als Positiv, also dunkel auf hellem Grunde, reproduziert (vgl. p. 722). Die Zeitpunkte des Belichtens bzw. Verdunkelns sind am oberen bzw. unteren Rande durch Pfeile markiert. Abszissenmaßstab 1 mm aufgezeichnet in ca. 30". Die Zeit wächst von rechts nach links.



Die im vorstehenden mitgeteilten Werte für die Einstellungsdauer der Saite sind also bedeutend länger als sie sich zufolge den Rechnungen der p. 724 und 725 ergaben.

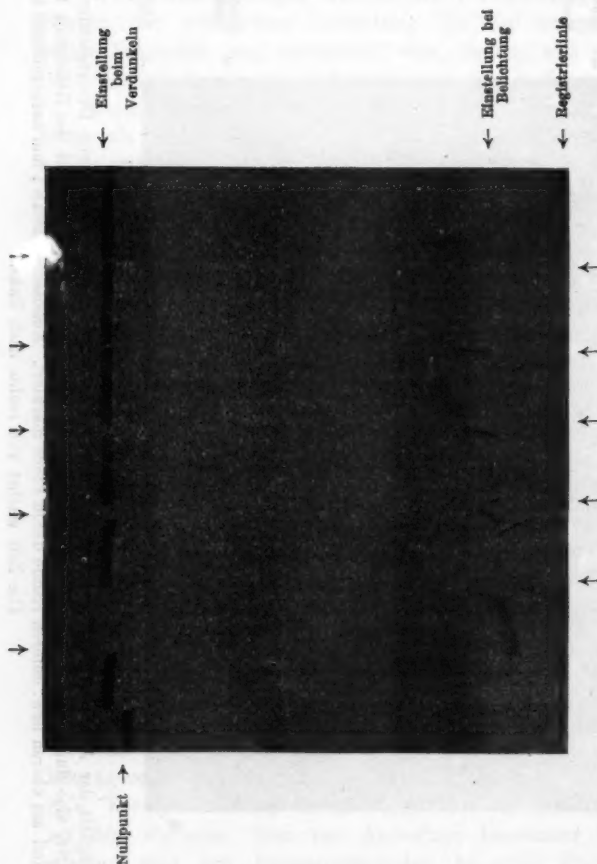


Fig. 6. Trägheit der Anordnung, aufgezeichnet mit dem registrierenden Mikrophotometer. Die registrierte Kurve ist als Positiv, also dunkel auf hellem Grunde, reproduziert (vgl. p. 722). Die Zeitpunkte des Belichtens bzw. Verdunkelns sind am oberen bzw. unteren Rande durch Pfeile markiert. Abszissenmaßstab 1 mm = ca. 90". Die Zeit wächst von rechts nach links.

Der Grund dafür wird, da auch die Einstellungsdauer des Elektrometers nicht in Frage kommt (vgl. p. 724), in den Eigenschaften der lichtelektrischen Zellen vermutet. Dafür



spricht unter anderem auch die Tatsache, daß die Zuschaltung von Kapazitäten zum Elektrometer, die groß sind gegenüber der des letzteren und der mit ihm verbundenen Leitungen, den Gang der Einstellung nicht wesentlich ändert, im Gegensatz zu den Folgerungen der Gleichungen (2) und (3), p. 724 und 725. Man bemerkt zwar, zumal beim Zuschalten größerer Kapazitäten, deutlich ein langsames Wandern der Elektrometersaite nach plötzlichem Belichten bzw. Verdunkeln in den ersten Sekunden, der Gang unterscheidet sich jedoch schon 5" nach Beginn nicht mehr von dem bei unzugeschalteter Kapazität, wie Tab. 3 zeigt.

Tabelle 3.

Einflußlosigkeit zugeschalteter Kapazität auf die Belichtungsträgheit.  
Kapazität des Elektrometersystems 35 cm. Zugeschaltete Kapazität 250 cm.

Zeit nach dem Belichten in Sek.	Einstellung des Elektrometers in mm		
	ohne zugeschaltete Kapazität	mit zugeschalteter Kapazität	ohne zugeschaltete Kapazität
0	71,5	71,6	71,6
5	20,3	21,0	20,5
10	19,5	19,3	19,3
15	19,0	18,8	19,0
30	18,4	18,3	18,3
60	17,4	18,0	17,8
120	17,0	17,2	17,2

Auch eine Verstärkung der Beleuchtung von Zu- und Ableitungszelle im Verhältnis von rund 1 zu 3, sowie eine Verringerung der Beleuchtung im Verhältnis 1 zu 9, durch die die Trägheit zufolge den Gleichungen (2) und (3) bedeutend herabgesetzt bzw. erhöht werden mußte, ändert nichts wesentliches an dem geschilderten Verlauf der Einstellung der Elektrometersaite. Dagegen scheinen Beleuchtungen von wesentlich größerer Intensität (vgl. p. 715) die Trägheit ganz bedeutend herabzumindern, was übereinstimmen würde mit den Angaben anderer Forscher, insbesondere mit persönlichen Mitteilungen der Herren Elster und Geitel, die bei starken Belichtungen keine Trägheit feststellen konnten.

Nach allem scheint die Vermutung berechtigt, daß das geschilderte Verhalten der Anordnung im wesentlichen bedingt

ist durch die Eigenschaften der lichtelektrischen Zellen selbst. Man hat den Eindruck, als ob eine gewisse Zeit dafür erforderlich wäre, bis bei plötzlichem Belichten mit den verfügbaren relativ schwachen Lichtmengen der Gasinhalt der Zellen völlig ionisiert ist und als ob beim Verdunkeln die Ionisierung eine merkliche Zeit brauchte, um wieder zu verschwinden, wie derartige Verzögerungen beim Elektrizitätsdurchgang durch Gase ja auch anderweit bekannt sind. Im Zusammenhang damit schien es nicht ausgeschlossen, daß die geringe Größe des beleuchteten Stückes der Zuleitungszelle (vgl. p. 717) für die Trägheit verantwortlich sein könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn durch das Auflegen einer Mattscheibe auf den Spalt *Sp* (Fig. 4), wodurch das Licht gleichmäßig auf die Zelle verteilt wurde, trat keine Änderung im Gange der Trägheit ein. Auch eine schwache zeitlich konstante Hilfsbeleuchtung der Zuleitungszelle erwies sich als einflußlos.

Zurzeit sind Versuche im Gange, um festzustellen, ob durch Änderung der Dimensionen der lichtelektrischen Zellen und ähnliches bzw. durch Variieren der elektrischen Bedingungen, insbesondere der angelegten Spannungen, dem geschilderten Übelstand abgeholfen werden kann.

Glücklicherweise ist für die Zwecke der Praxis die Sachlage nicht ganz so ungünstig, wie es von vornherein scheinen könnte, denn bei der Registrierung von Schwärzungsverteilungen kann man leicht derart plötzliche Belichtungen bzw. Verdunkelungen der Zuleitungszelle vermeiden, wie sie bei den Beobachtungen der Tab. 1—3, sowie bei der Aufnahme der Kurven Figg. 5 und 6 mit Absicht gewählt wurden.

Schiebt man in der Tat zum Beispiel Spektrallinien von der Ann. d. Phys. 34. p. 377. 1911 behandelten Art, die, von Schleier zu Schleier gemessen, einige Zehntel Millimeter breit sind, mittels des langsamsten Ganges des Uhrwerkes unter dem Mikroskop vorbei, wobei die Platte in 2—3 Min. um etwa 1 mm vorrückt (vgl. p. 719) und hält das Uhrwerk an, wenn gerade die Stelle größter Schwärzung auf den Spalt *Sp* (Fig. 1) projiziert ist, dann liegt das Weiterkriechen der Saite hart an der Meßfehlergrenze und beträgt im allgemeinen auch in Minuten kaum mehr als Bruchteile eines Millimeters. Ganz

analog liegen die Verhältnisse, wenn man nach erfolgter Durchregistrierung der Linie das Uhrwerk anhält, sobald wieder die Schleierschwärzung auf den Spalt *Sp* (Fig. 1) projiziert ist. Auch hier beträgt das Weiterkriechen der Saite selten mehr als etwa 0,5 mm.

Weitere Einzelheiten über den möglichen Fehlereinfluß der Trägheit auf die Registrierung von Schwärzungsverteilungen sowie über die Umgehung des Einflusses stehen auf p. 749.

#### Zeitliche Konstanz der Angaben des Instrumentes.

Beobachtet man die im § 3 beschriebenen Vorsichtsmaßregeln hinsichtlich des elektrostatischen Schutzes von Stromkreis und Elektrometer (p. 712), sowie gegebenenfalls der Trockenhaltung der in Betracht kommenden Isolationen (p. 712 und 713) und benutzt man Nernststifte, die die p. 715 erwähnte üble Eigenschaft lokaler Intensitätsschwankungen nicht besitzen, dann ist die zeitliche Konstanz der Angaben der Anordnung praktisch völlig ausreichend. Die Saite reagiert zwar etwas auf Erschütterungen, doch können diese während des

Tabelle 4.

Zeitliche Konstanz der Angaben des Instrumentes.

1	2	3	4	5
Nummer der Intensitäts- marke	Einstellung der Elektrometersaite in mm			
	9 <sup>b</sup> 55 <sup>m</sup> Vorm. $t = 18,5^{\circ}$	11 <sup>b</sup> 30 <sup>m</sup> Vorm. $t = 18,8^{\circ}$	2 <sup>b</sup> 40 <sup>m</sup> Nachm. $t = 19,1^{\circ}$	6 <sup>b</sup> 00 <sup>m</sup> Nachm. $t = 19,8^{\circ}$
	Nullp. 74,5	Nullp. 74,4	Nullp. 74,4	Nullp. 74,3
1	70,0	69,2	69,5	69,5
2	69,3	68,6	69,3	69,3
3	68,3	68,0	68,3	68,3
4	68,3	62,4	62,7	62,5
5	39,8	39,8	40,6	40,8
6	24,0	nicht abgelesen		
7	70,0	69,3	69,3	69,2
8	69,5	68,8	68,5	68,8
9	68,8	68,0	67,8	67,8
10	63,3	63,6	62,7	62,8
11	41,2	39,5	39,7	40,0
12	22,5	21,5	21,8	22,3

Registrierens leicht vermieden werden. Zudem ist die Schwingungsdauer der Saite kurz und die Schwingungen klingen rasch ab.

Tab. 4 enthält Angaben über das Ergebnis der Ausmessung einer Reihe von Schwärzungsmarken, die im Laufe eines Tages wiederholt durchgeführt wurde, ohne daß man irgendwelche Rücksicht auf Konstanthalten der Temperatur im Beobachtungsraume oder auf Kontrolle der Belastung der überlasteten (vgl. p. 715) Nernstlampe nahm. Kolonne 1 enthält die Nummer der einzelnen Schwärzungsmarken und die Kolonnen 2, 3, 4 und 5 die zugehörige Einstellung der Elektrometersaite in Millimetern. Dabei wurde stets so lange gewartet, bis die Einstellung der Saite praktisch konstant geworden war. Bei jeder Kolonne findet man noch die Zeit, zu der die Messung erfolgte, die Temperatur hierbei, sowie den Nullpunkt des Elektrometers bei Erden der Saite.

Wie man sieht, stimmen die zueinander gehörenden Zahlen der Horizontalkolonne durchwegs auf Bruchteile von Millimetern untereinander überein.

Abweichungen von einem ganzen Millimeter sind selten. Dabei ist noch zu bedenken, daß vor der Messung jeder Marke die Platte mit der Marke in richtiger Orientierung unter das Mikroskop geschoben werden mußte, wobei keineswegs sicher ist, ob stets die gleiche Stelle der Marke auf den Spalt *Sp*, Fig. 1, abgebildet wird, daß aber andererseits die Schwärzung innerhalb einer Marke wegen der Unregelmäßigkeit der Lagerung der Silberkörner merklich variieren kann (vgl. p. 737).

Aus den Ergebnissen der Tab. 4 folgt also, daß Konstanz der Angaben des Instrumentes innerhalb einer Meßgenauigkeit von etwa 0,5 mm ohne weitere Vorsichtsmaßregeln viele Stunden lang vorhanden ist, was für praktische Zwecke mehr als genügt. Die Temperaturänderung von etwas über 1°, die im Laufe des Tages eintrat, scheint dabei keinen systematischen Einfluß auf die Angaben auszuüben.

Die Konstanz der Angaben des Instrumentes innerhalb längerer Zeiträume wurde, weil für Meßzwecke weniger von Wichtigkeit, nicht in der umständlichen und zahlenmäßigen Weise der Tab. 4 geprüft. Jedoch wurde festgestellt, daß im Laufe eines Vierteljahres die Empfindlichkeit der Anordnung,

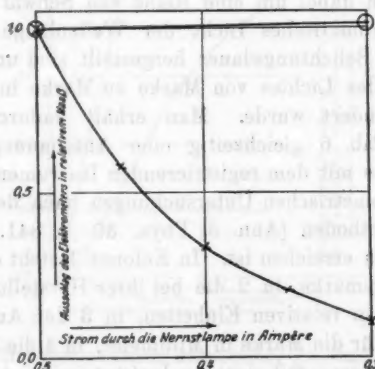
im besonderen also die Empfindlichkeit der lichtelektrischen Zellen, keine wesentliche Änderung erlitten hat.

Zahlenwerte über die durch die Schaltung Fig. 1 erreichte Kompensation von Schwankungen in der Intensität der Nernstlampe *N* finden sich in Tab. 5, eine graphische Darstellung davon in Fig. 7. In Kolonne 1 steht die Strombelastung der Nernstlampe in Ampere, in Kolonne 2 der zugehörige Aus-

Tabelle 5.

Kompensation des Einflusses von Schwankungen in der Intensität der Nernstlampe *N*. Fig. 1.

1	2	3
Strom durch die Nernstlampe in Amp.	Ausschlag des Elektrometers in relativem Maße bei unkompensierter Schaltung (Bronsonwiderstand in der Ableitung)	bei kompensierter Schaltung (von der Nernstlampe her beleuchtete lichtelektrische Zelle in der Ableitung)
0,50	1,00	1,00
0,45	0,58	—
0,40	0,33	—
0,35	0,20	—
0,30	0,11	1,01



× Ausschlag bei unkompensierter Schaltung.

○ Ausschlag bei kompensierter Schaltung.

Fig. 7. Kompensation von Intensitätsschwankungen der Nernstlampe.

schlag des Elektrometers, wenn als Ableitungswiderstand  $Z_1$  (Fig. 1) ein Bronsonwiderstand benutzt wird, also keine Kompensation für Schwankungen der Lichtstärke von  $N$  vorhanden ist, und in Kolonne 3 der Ausschlag des Elektrometers, wenn der Bronsonwiderstand ersetzt wird durch eine gleichfalls von  $N$  her beleuchtete lichtelektrische Zelle. Angaben über die hierbei benutzten Zellen vgl. p. 710. Die Hinzuschaltung von  $Z_3$  zu  $Z_2$  (Fig. 1) ändert nichts an der Größe der Kompensation.

Während also die Lichtstärke der Nernstlampe von 1 auf rund  $\frac{1}{10}$  und damit der Elektrometerausschlag bei unkompenzierter Schaltung im gleichen Verhältnis herabgeht, steigt bei der Kompensationsschaltung der Elektrometerausschlag nur um ein  $\frac{1}{100}$  seines Wertes gleichmäßig in die Höhe. Dadurch wird, wie schon bemerkt, jede Kontrolle der Belastung der Nernstlampe während des Registrierens überflüssig.

#### Zusammenhang zwischen Elektrometerausschlag und Schwärzung.

In Tab. 6 sind einige Daten zusammengestellt, um den Zusammenhang zwischen Schwärzung und zugehörigem Ausschlag des registrierenden Instrumentes zu veranschaulichen. Es handelt sich dabei um eine Reihe von Schwärzungen, die durch monochromatisches Licht der Wellenlänge 6439 Å.-E. bei je gleicher Belichtungsdauer hergestellt sind und bei denen die Intensität des Lichtes von Marke zu Marke in bekanntem Verhältnis geändert wurde. Man erhält dadurch aus den Werten der Tab. 6 gleichzeitig eine Anschauung über die Genauigkeit, die mit dem registrierenden Instrument bei photographisch-photometrischen Untersuchungen nach den schon beschriebenen Methoden (Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909; 34. p. 377. 1911) zu erreichen ist. In Kolonne 1 steht die Nummer der Schwärzungsmarke, in 2 die bei ihrer Herstellung benutzte Lichtintensität in relativen Einheiten, in 3 der Ausschlag des Elektrometers für die Marke in Millimeter, in 4 die Schwärzung der Marke, gemessen mit dem im Institut vorhandenen Hartmannschen Mikrophotometer (Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909), und angegeben in Millimeter des Vergleichskeiles dieses Instrumentes und in 5 schließlich lediglich zur Orientierung die ab-

solute Schwärzung (vgl. p. 725) bezogen auf die dem Hartmannschen Instrument beigegebenen Schwärzungsnormale.

Tabelle 6.

Zusammenhang zwischen Schwärzung und Ausschlag des registrierenden Mikrophotometers.

1	2	3	4	5
Nummer der Schwärzungsmarke	Zugrunde liegende Lichtintensität, relative Einheiten	Ausschlag des registrierenden Instrumentes in mm	Ausgabe des Hartmannschen Instrumentes in mm	Absolute Schwärzung
1	100,0	69,6	Am Keil nicht mehr meßbar	—
2	66,2	69,0		2,7
3	42,9	68,2	57,8	2,1
4	27,0	62,9	44,3	1,4
5	15,0	40,2	34,6	0,8
6	7,9	22,4	28,6	0,6
Schleier	0,0	ca. 15	27,2	0,5

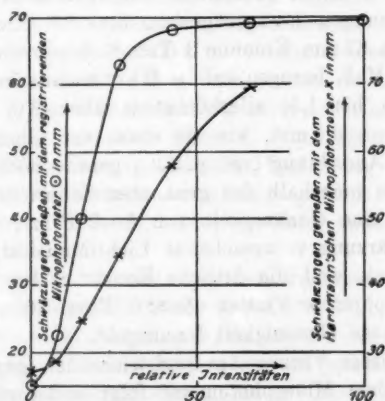


Fig. 8. Schwärzungen relativer Intensitäten, gemessen mit dem Hartmannschen  $\times$  und dem registrierenden Mikrophotometer  $\circ$ .

In Fig. 8 ist der Inhalt von Tab. 6 graphisch dargestellt. Als Abszissen sind aufgetragen die die Schwärzung ver-



ursachenden Lichtintensitäten in relativen Einheiten, Ordinaten sind die zugehörigen Schwärzungen, gemessen mit dem registrierenden, sowie mit dem Hartmannschen Mikrophotometer.

Die mit dem Hartmannschen Instrument gemessene Kurve steigt in ihrem Verlauf wesentlich gleichmäßiger von der Abszissenachse aus an als die mit dem registrierenden Instrument erhaltene, die allerdings zunächst sehr steil anwächst, dafür aber dann nahezu horizontal verläuft. Der Grund für diesen letzteren Kurvenverlauf liegt darin, daß die Ausschläge des registrierenden Instrumentes proportional der auf die Zuleitungszelle auffallenden Lichtintensität sind. Dieses Verhalten bedingt ohne Zweifel eine Überlegenheit des Hartmannschen Instrumentes gegenüber dem registrierenden, indem dem ersteren ein weiterer Schwärzungsbereich für photographisch-photometrische Zwecke zugänglich ist als dem letzteren, wenigstens wenn man nicht zu dem umständlichen Verfahren der p. 740 oder zu einer modifizierten Verwendung des Saiten-elektrometers greifen will, die zurzeit anderweitige Schwierigkeiten bietet. Um mit dem registrierenden Instrument einigermaßen sicher arbeiten zu können, empfiehlt es sich also nicht, über Schwärzungen hinauszugehen, die der Einstellung 62, allerhöchstens 67 mm Kolonne 3 Tab. 6 entsprechen, das sind in absolutem Maß, bezogen auf die Hartmannschen Normalen, Schwärzungen bis 1,5, allerhöchstens aber 2,0. Eine Meßgenauigkeit von 0,5 mm, wie sie etwa, vor allem wegen der Trägheit der Anordnung (vgl. p. 730), gerade noch zu erhoffen ist, gibt dann innerhalb des genannten Schwärzungsbereiches immer noch eine Genauigkeit von 1—2 Proz., bezogen auf die die Schwärzung verursachende Lichtintensität, was schon deshalb genügt, weil die örtliche Konstanz der Empfindlichkeit photographischer Platten (Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1900) kaum über diese Genauigkeit hinausgeht.

Ein gewisser Vorzug des registrierenden gegenüber dem Hartmannschen Mikrophotometer folgt andererseits aus der erhöhten Empfindlichkeit des ersteren für Schwärzungsänderungen im Gebiete der geringeren Schwärzungen, die der Schleierschwärzung nahe liegen und die mit dem Hartmannschen Instrument nur ungenau einzustellen sind. Gerade bei der photographisch-photometrischen Beurteilung lichtschwacher



Objekte wird man diese Eigenschaft des registrierenden Instrumentes wegen der Ersparnis an Expositionszeit besonders angenehm empfinden. Es muß allerdings hinzugefügt werden, daß die höhere Empfindlichkeit des registrierenden Instrumentes im Gebiete geringer Schwärzungen insofern wieder etwas illusorisch wird, als wegen der körnigen Struktur der zu messenden Schwärzungen die Registrierkurve einer dem Auge ganz gleichmäßig erscheinenden Schwärzung aus lauter kleinen Zacken besteht, die von der Zufälligkeitsanordnung der pro Flächeneinheit schon nicht mehr sehr zahlreichen Silberkörner herrührt. Sämtliche im folgenden mitgeteilten Registrierkurven von Schwärzungsverteilungen geben, besonders in den Teilen, in denen die Kurven parallel zur Registrierlinie (vgl. p. 721) verlaufen, eine Anschauung von diesen Zufälligkeitszacken, die naturgemäß verhältnismäßig um so hervorstechender sind, je geringer die Schwärzung ist. Daß die genannten Zacken nicht etwa von zufälligen Schwankungen der Elektrometersaite herrühren, wie man vermuten könnte, folgt außer aus dem glatten Verlauf der Kurven Figg. 5 u. 6, bei denen keine Schwärzungen, sondern nur der Gang der Saite für sich registriert wurde, noch daraus, daß sich beim wiederholten Registrieren derselben Schwärzungsverteilung die Zacken bis in die allerfeinsten Einzelheiten identisch reproduzieren. Übrigens kann man derartige Unregelmäßigkeiten in der Körnerlagerung auch mit dem Hartmannschen Instrument bemerken (Ann. d. Phys. 30. p. 859 u. 860. 1909), nur dürfte ihre quantitative Verfolgung über größere Strecken, die für Zwecke der photographischen Photometrie von Wichtigkeit sein kann, schon aus Zeitgründen kaum möglich sein.

Die Eigenschaften des mit dem registrierenden Mikrophotometer erhaltenen Verlaufes der Kurve Fig. 8 prägen sich sehr deutlich aus in den Figg. 9 und 10, die den Schwärzungsverlauf in einem mit dem Stufengitter aufgenommenen Photogramm von Bromabsorptionslinien, die auf dem Hintergrund der durch Druck verbreiterten grünen Quecksilberlinie 5461 Å.-E. stehen, darstellen. Fig. 9 stellt den Kurvenverlauf dar für das Originalphotogramm, das für das registrierende Instrument etwas zu stark geschwärzt ist, und bei dem infolgedessen die einzelnen Bromabsorptionslinien nur als wenig ausgeprägte

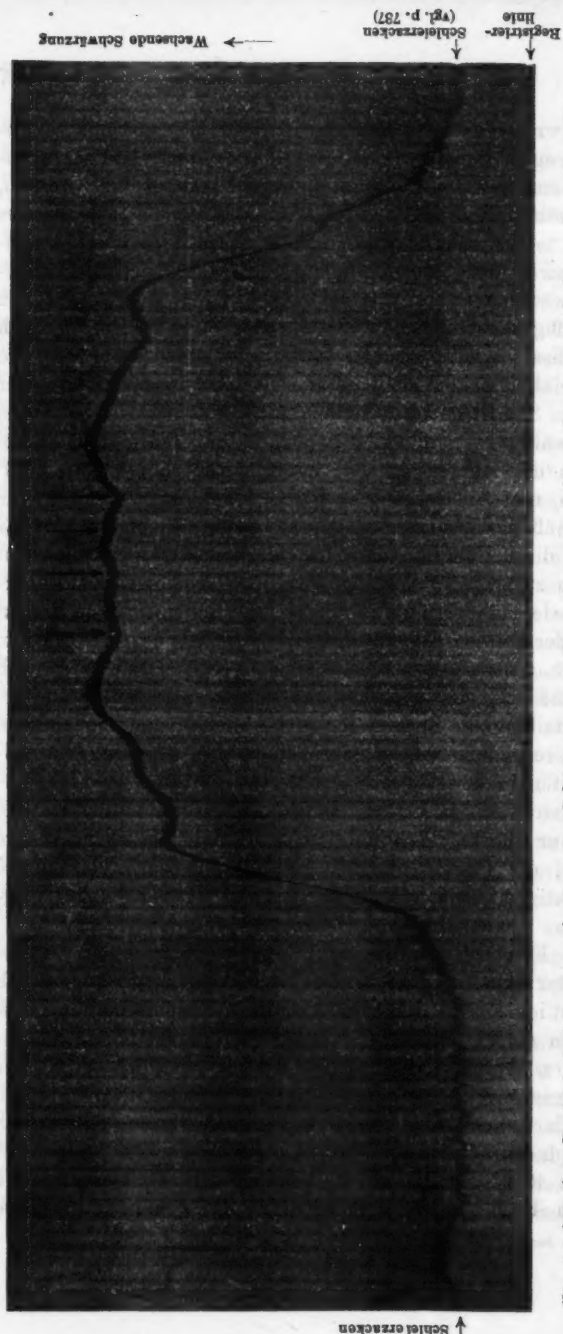


Fig. 9. Mit dem Registrierinstrument aufgenommene Schwärzungsverteilung einer zu stark geschwärzten Aufnahme, darstellend Bromabsorptionslinien auf dem Hintergrund der grünen Quecksilberlinie 5461 Å.-E. Übersetzungsverhältnis 46,4 fach. Abszissenmaßstab 1 mm = ca. 0,01 Å.-E. Die Lage der Absorptionslinien ist durch Pfeile am oberen Rande der Figur angedeutet

Einsenkungen in der Registrierkurve hervortreten. Fig. 10 stellt den Kurvenverlauf dar, nachdem das Photogramm mit

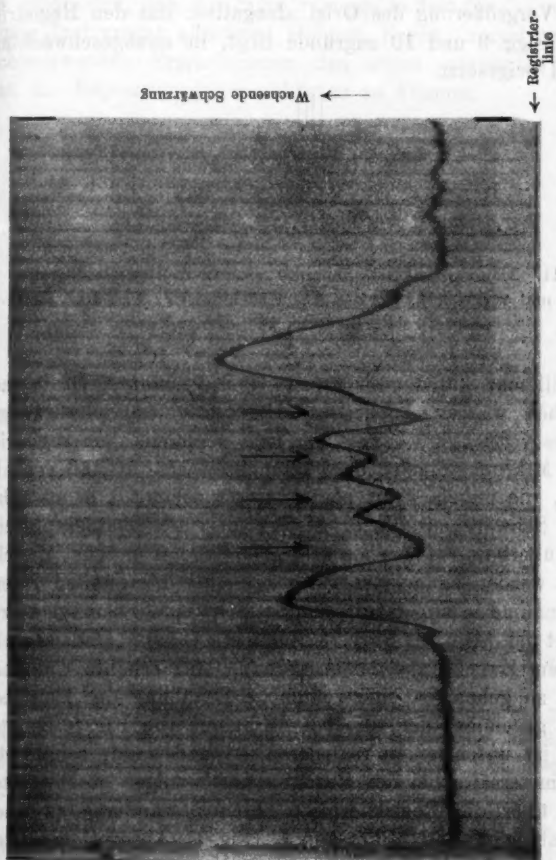


Fig. 10. Schwärzungsverteilung in der mittleren Partie der Fig. 9 nach Abschwächung des in Fig. 9 registrierten Negativs. Lage der Bromabsorptionslinien durch Pfeile angedeutet. Man sieht nebenbei, daß der Abschwächer nicht gleichmäßig angegriffen hat.

dem Farmerschen Blutlaugensalzabschwächer abgeschwächt und damit der Schwärzungsverlauf in das für Ausmessung mit dem registrierenden Mikrophotometer günstige Schwärzungs-

gebiet hineinverlegt ist. Die Kurven sind mit der 46,4 fachen Übersetzung registriert. Es entspricht 1 mm Abszisse der Registrierkurve rund 0,01 Å.-E. In Fig. 11 ist noch eine zehnmale Vergrößerung des Originalnegativs, das den Registrierungen Fig. 9 und 10 zugrunde liegt, in unabgeschwächtem Zustand beigesetzt.



Fig. 11. Das den Figg. 9, 10 und 12 zugrunde liegende Negativ, ca. 10 mal vergrößert, vor der Abschwächung der Fig. 10. Bromabsorptionslinien durch Pfeile angedeutet.

Will man auf die Benutzung eines konstanten Ordinatenmaßstabes während der Registrierung eines Schwärzungsverlaufes verzichten, dann kann man auch mit dem registrierenden Mikrophotometer Schwärzungen verhältnismäßig exakt messen, die ungefähr bis zum Werte 3 gehen, d. h. etwa bis zu der Schwärzungsgrenze, bis zu der die photographische Platte überhaupt für photographisch-photometrische Zwecke benutzt werden kann, insofern nach einer bestimmten Intensitätszunahme eine entsprechende Schwärzungszunahme zugeordnet ist (Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909). Man braucht zu diesem Zwecke nur der Anordnung eine erhöhte Empfindlichkeit zu geben — eine zehnfache Erhöhung der Empfindlichkeit gegenüber der, die bei Aufnahme von Fig. 8 benutzt wurde, ist unschwer zu realisieren — und dann, sobald die Elektrometersaite bei der Registrierung weniger geschwärzter Stellen über die Registrierplatte hinaus wandert, zwischen Nernstlampe *N* und Mikroskop *M* (Fig. 1) Absorptionsplatten von gemessenem Schwärzungsverhältnis einzuschalten. Eine auf diese Art lediglich durch Erhöhung der Empfindlichkeit der Anordnung (vor der Abschwächung des Negativs) gewonnene Kurve für den Schwärzungsverlauf im dunkelsten Teil der Fig. 9 ist in Fig. 12 dargestellt. Die Erhöhung der Empfindlichkeit erfolgte durch Abblenden der Ableitungszelle. Immer-

hin ist das Verfahren bei Registrierung komplizierter Schwärzungsverteilungen mühsam und man wird es deshalb im allgemeinen vorziehen, auszumessende Platten von vornherein so zu exponieren, daß ihre Schwärzungen in dem für das registrierende Instrument günstigen Gebiete liegen, zumal man bei lichtschwachen Erscheinungen den schon erwähnten Vorteil hat, die Expositionsdauer abkürzen zu können.

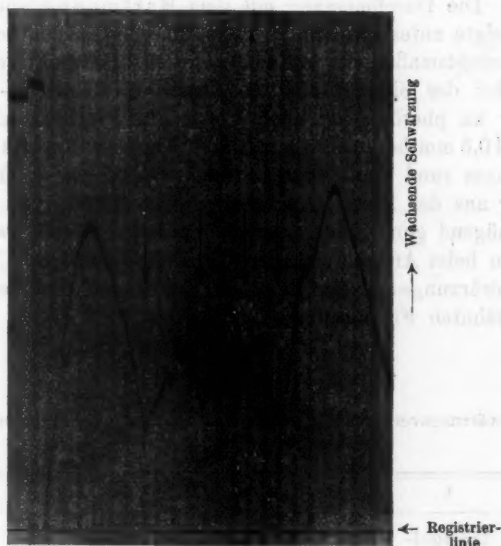


Fig. 12. Schwärzungsverteilung in der mittleren Partie der Fig. 9, registriert mit erhöhter Empfindlichkeit der Anordnung, vor der Abschwächung der Fig. 10. Bromabsorptionslinien durch Pfeile angedeutet.

Vergleich von Schwärzungskurven, die mit dem Hartmannschen und dem registrierenden Mikrophotometer erhalten sind.

Eine zusammenfassende Probe dafür, ob bei der im vorhergehenden ausgeführten Diskussion der Wirkungsweise des registrierenden Mikrophotometers alle in Betracht kommenden Fehlerquellen berücksichtigt sind, erhält man durch Vergleich

von Schwärzungskurven, die mit dem eben genannten und mit dem Hartmannschen Instrument gemessen sind.

Derartige Vergleichsmessungen wurden an der Schwärzungsverteilung in dem Einzelring eines Fabry-Perot-Ringsystems vorgenommen, da das registrierende Instrument zunächst zu eingehenden Untersuchungen an der Intensitätsverteilung derartiger Systeme benutzt werden soll.

Die Durchmessung mit dem Hartmannschen Instrument erfolgte unter den Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909 beschriebenen Vorsichtsmaßregeln, mit der stärkeren (50 fachen) Vergrößerung, wobei der Silberstreifen im Lummer-Brodhun-Würfel aus der zu photometrierenden Platte ein Flächenstück von 0,01 mal 0,5 mm herausblendet. Da der Durchmesser des gemessenen Ringes rund 8 mm beträgt, kann das Ringstück für die Länge der aus der Platte herausgeblendeten Fläche von 0,5 mm als genügend geradlinig aufgefaßt werden. In der Tat bemerkte man beim Ausphotometrieren der Schwärzungen nirgends eine Schwärzungsdifferenz zwischen den Enden und der Mitte des erwähnten Flächenstückes.

Tabelle 7.

Schwärzungsverteilung in einem Fabry-Perot-Ring, gemessen mit dem Hartmannschen Mikrophotometer.

1	2	1	2
Trommel-einstellung des Mikrometertisches in mm	Schwärzung in mm	Trommel-einstellung des Mikrometertisches in mm	Schwärzung in mm
45,500	26,1	45,835	41,8
45,550	25,9	45,850	41,5
45,600	25,8	45,880	40,4
45,650	26,1	45,910	35,0
45,700	27,5	45,940	30,5
45,730	30,5	45,970	27,8
45,760	34,4	46,000	25,7
45,790	40,8	46,050	26,0
45,805	40,8	46,100	25,5
45,820	41,7		

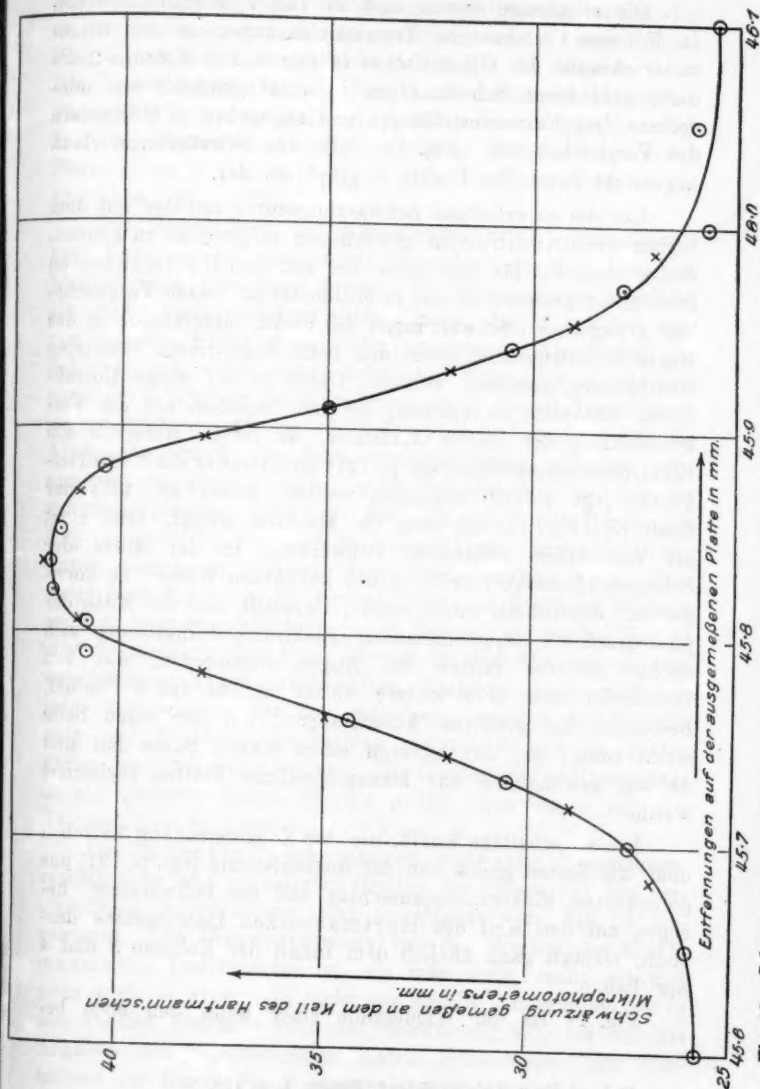


Fig. 18. Schwärzungsverteilung in einem Fabry-Perot-Ring. (Rote Cd-Linie 6439 Å.-E., Etalondicke 15 mm.)  
 O gemessen mit dem Hartmannschen Mikrophotometer. x gemessen mit dem registrierenden Mikrophotometer.  
 Abszissenmaßstab: → 1 mm dieser Figur = 0,0005 Å.-E.



Die erhaltenen Werte sind in Tab. 7 zusammengestellt. In Kolonne 1 stehen die Trommelablesungen an der Mikrometerschraube des Objekttisches in mm und in Kolonne 2 die dafür gefundenen Schwärzungen jedesmal gemittelt aus mindestens drei Einzeleinstellungen und angegeben in Millimetern des Vergleichskeiles. Fig. 13 stellt den Schwärzungsverlauf, angemerkt durch die Punkte  $\odot$  graphisch dar.

Um die so erhaltene Schwärzungskurve mit der mit dem registrierenden Instrument gewonnenen vergleichen zu können, mußte zunächst für eine Reihe von mit dem Hartmannschen Instrument gemessenen und in Millimeter an dessen Vergleichskeil angegebenen Schwärzungen der Elektrometerausschlag des Registrierinstrumentes unter den beim Registrieren benutzten Bedingungen gemessen werden. Dabei ist auf einige Korrekturen Rücksicht zu nehmen, die sich beziehen auf die Verschiedenheit der beiden Maßstäbe, an denen einerseits die Elektrometerausschläge (vgl. p. 721) andererseits die Registrierkurven (vgl. p. 723) abgelesen werden, ferner ist, falls der Spalt (*Sp*, Fig. 1), mit dem die Messung erfolgt, breiter ist als das Stück konstanter Schwärzung in der Mitte der Schwärzungsmarke hierfür in der bekannten Weise<sup>1)</sup> zu korrigieren. Schließlich wurde noch festgestellt, daß die Mitte der photographisch aufgenommenen Elektrometereinstellung sich deckte mit der mittels des Auges abgelesenen, was von vornherein nicht ohne weiteres sicher ist, da das Fadenbild, besonders bei größeren Ausschlägen, auf der einen Seite einen roten, auf der anderen einen blauen Saum hat und da auf gewöhnliche nur blauempfindliche Platten registriert wurde.

Die so erhaltene Kurve, die den Zusammenhang zwischen dem, am besten gleich von der Registrierlinie (vgl. p. 721) aus gerechneten Elektrometerausschlag und der Schwärzung, bezogen auf den Keil des Hartmannschen Instrumentes darstellt, verläuft ganz ähnlich dem Inhalt der Kolonne 3 und 4 der Tab. 6.

Fig. 14 ist die Wiedergabe einer unter den eben be-

1) Lord Rayleigh, *Scient. Papers.* 1. p. 135.

schriebenen Bedingungen erhaltenen Registrierung des Schwärzungsverlaufes in drei nebeneinanderliegenden Fabry-Perot-Ringen, von denen der mittlere der in Fig. 13 dargestellte ist. Die Breite des Spaltes (*Sp*, Fig. 1) bei Aufnahme betrug am Plattenort  $0,03 \times 0,4$  mm (vgl. p. 717), die Ganggeschwindigkeit des Uhrwerkes 1 mm Fortrückung der auszumessenden Platte in ca. 3' (vgl. p. 719), die benutzte Übersetzung ist die 46,4 fache (vgl. p. 722).

Das Registrieren des Kurvenzuges erfolgte von rechts nach links, so daß also zuerst der schmälere und dann der breitere Ring gezeichnet wurde. Es könnte somit scheinen, als ob die nach Passieren jeden Ringes, der ja auf der auszumessenden Platte dunkel ist, auftretende Absenkung des Schleiers von rechts nach links eine Folge der p. 724 besprochenen Trägheit der Anordnung wäre, die in diesem Sinne wirken müßte. Daß dies nicht der Fall ist, sondern daß die Absenkung durch die Schwärzungsverteilung auf der auszumessenden Platte bedingt wird, beweist Fig. 15, die die Schwärzungskurve derselben drei Fabry-Perot-Ringe wie Fig. 14 darstellt, nur daß im umgekehrten Sinne registriert wurde, zuerst der breitere, dann der schmälere Ring. Hier steigt nach Passieren der dunklen Ringe die Kurve im Schleier an und zwar ungefähr in gleichem Betrag, wie sie bei Fig. 14 abwärts wandert. Die Figg. 14 und 15 sind übrigens an zwei verschiedenen Tagen aufgenommen, nachdem naturgemäß vor jeder Registrierung der Zusammenhang zwischen der Schwärzung und Elektrometerausschlag festgestellt und in beiden Fällen identisch gefunden war. Die Gleichheit der Kurvenzüge ist ein weiterer Beweis für die p. 731 besprochene zeitliche Konstanz der Angaben des Instrumentes.

Die aus der Fig. 14 entnommenen, mittels des Übersetzungsverhältnisses 46,4 reduzierten Breiten des Ringes bei den verschiedenen Schwärzungen sind als Punkte  $\times$  in Fig. 13 eingetragen. Die Übereinstimmung mit den Werten des Hartmannschen Instrumentes ist, wie man sieht, recht gut und zwar auch — aber wohl mehr aus Zufälligkeitsgründen — in den Partien oberhalb etwa der Schwärzung 40, bei der die Angaben des registrierenden Instrumentes wegen des Verhaltens der Kurve Fig. 8 weniger zuverlässig sind.

In Tab. 8 ist der Inhalt der Fig. 13 zahlenmäßig mit einigen anderen diesbezüglichen Daten zusammengestellt. In

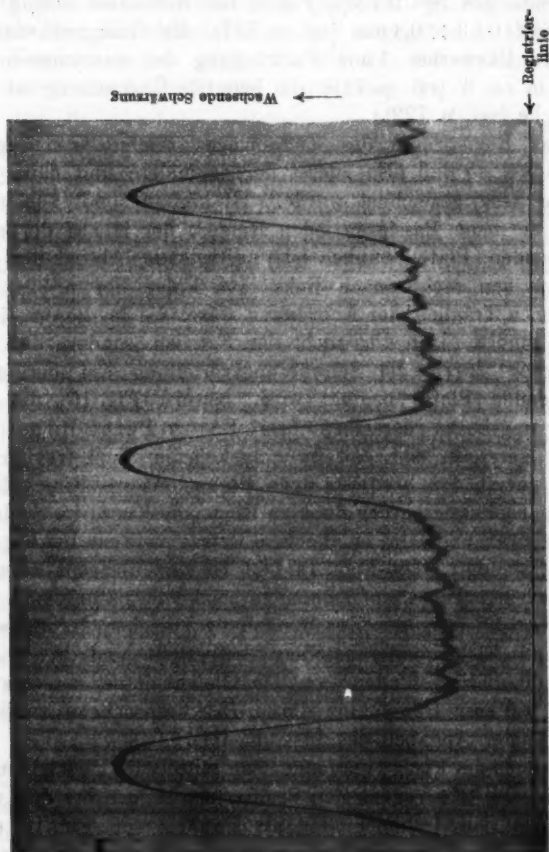


Fig. 14. Schwärzungsverteilung in drei nebeneinander liegenden Fabry-Perot-Ringen.  
1 mm Abszisse =  $0,003 \text{ \AA-E.}$

Kolonne 1 stehen die Schwärzungen bezogen auf den Keil des Hartmannschen Mikrophotometers in Millimeter, in 2 die dafür mit dem Hartmannschen Instrument gefundenen Breiten des

Fabry-Perot-Ringes in Millimeter, und in 3 die entsprechenden vom Registrierinstrument angegebenen Breiten in Millimeter.

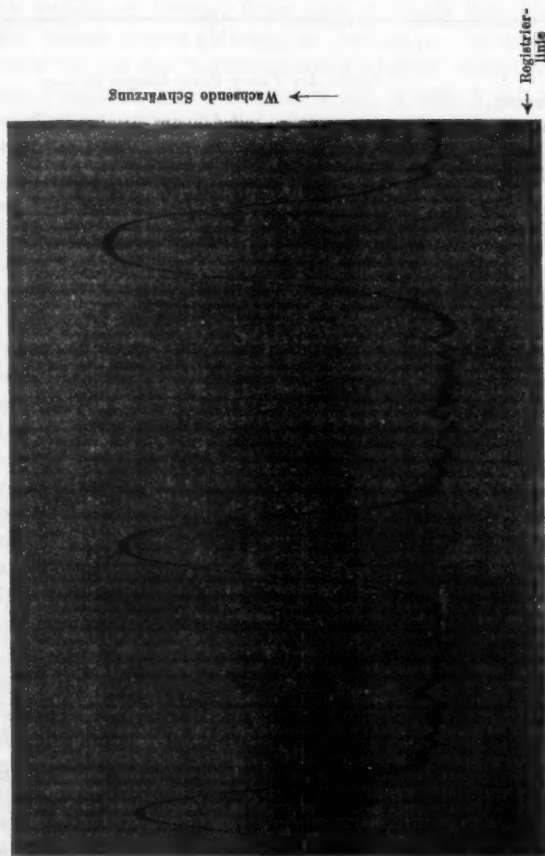


Fig. 15. Wie Fig. 14, nur umgekehrt registriert.

In den Kolonnen 4, 5 und 6 sind die bei anderen Registrierungen mit den dabei benutzten, gegen die Kolonne 3 geänderten, Bedingungen erhaltenen Werte angegeben.

Tabelle 8.

Vergleich der Messung einer Schwärzungsverteilung mit dem Hartmannschen und dem registrierenden Mikrophotometer.

1	2	3	4	5	6
Schwärzung, gemessen am Keil des Hart- mannschen Instrumentes in mm	Breite des Fabry-Perot-Ringes in mm				
	gemessen mit dem Hart- mannschen Instrument	gemessen mit dem registrierenden Instrument Übersetzung 46,4 fach; Spalt $0,03 \times 0,04$ mm			
		Registrier- geschwin- digkeit	Registrier- geschwin- digkeit	rückwärts Registrier- geschwin- digkeit	rückwärts Registrier- geschwin- digkeit
		1 mm in 3'	1 mm in 30"	1 mm in 3'	1 mm in 30"
41,0	0,067	0,060	0,069	0,065	0,071
38,0	0,115	0,114	0,120	0,110	0,114
35,0	0,149	0,153	0,157	0,144	0,149
32,0	0,188	0,189	0,192	0,181	0,183
29,0	0,236	0,233	0,243	0,228	0,233
27,0	0,294	0,306	0,328	0,298	0,315

Die Abweichungen der in den Kolonnen 2—6 stehenden Werte voneinander gehen, mit Ausnahme der Zahlen für die niedrigste Schwärzung 27,0, die mit dem Hartmannschen Instrument nur schwer zu messen ist, nirgends über 0,01 mm hinaus. Auch die Maximalordinaten der Schwärzungskurven auf der Registrierplatte für die einzelnen Ringe weichen voneinander auf keiner der vier Registrierplatten um mehr als den p. 730 als möglich bezeichneten Betrag von rund 0,5 mm voneinander ab. Der Unterschied von 0,01 mm bei den Breitmessungen entspricht nahezu der Grenze der Ablesungsmöglichkeit für die Breiten der Registrierkurve überhaupt, da diese höchstens auf einige Zehntel Millimeter geschätzt werden können, was nach Division mit dem Übersetzungsverhältnis 46,4 auf eine Genauigkeit von etwa 0,01 mm für die Werte in den Kolonnen 2—6 führt. Dies ist gleichzeitig wohl auch die Grenze dessen, was zufolge Ann. d. Phys. 34, p. 400. 1911 die photographische Platte für sich genommen in der Definition von Linienbreiten leisten kann.

Weder die Änderung der Registriergeschwindigkeit von 1 auf das 6fache, noch die Registrierung in entgegengesetzter Richtung beeinflußt also die gemessenen Breiten um mehr als den genannten Betrag, wenn auch vielleicht eine kleinere für die beabsichtigten Messungen belanglose systematische Abhängigkeit von der Registriergeschwindigkeit vorhanden ist, wie ein Vergleich der Kolonnen 3 mit 4 und 5 mit 6 zu zeigen scheint. Damit ist jedenfalls erwiesen, daß die p. 724 besprochene Trägheit der Anordnung für die Ausmessung von Schwärzungsverteilungen nach Art der Fig. 13 ohne Bedeutung ist, wenn man unter den den Werten der Tab. 8 zugrunde liegenden Bedingungen registriert. Daß man auch noch für wesentlich steilere Schwärzungsverteilungen wenigstens mit der langsamsten Registriergeschwindigkeit von 1 mm Fortschub der auszumessenden Platte in 3' zuverlässige Werte erwarten darf, folgt aus der guten Übereinstimmung der mit dieser und der bedeutend größeren Registriergeschwindigkeit erhaltenen Werte der Kolonnen 3 und 4 bzw. 5 und 6 in Tab. 8.

Immerhin wird es, solange die Trägheit der Anordnung nicht völlig beseitigt ist, von Vorteil sein, die Zuverlässigkeit der Registrierkurven für jeden Kurventyp, also besonders für unsymmetrische Schwärzungsverteilungen, sowie für Verteilungen, bei denen auf einen steilen Aufstieg ein längeres Stück konstanter Schwärzung folgt, nachzukontrollieren, was, falls ein Hartmannsches Mikrophotometer nicht zur Verfügung steht, jederzeit durch Variieren der Registriergeschwindigkeit, sowie Registrieren in umgekehrtem Sinn erfolgen kann.

Bei dem weiteren Ausbau der mit dem Registrierinstrument bis jetzt gemachten Erfahrungen wird zunächst ein Hauptaugenmerk auf Beseitigung der noch vorhandenen Trägheit zu richten sein, um die Verwendung des Instrumentes zur Schnellregistrierung zu ermöglichen, die unter anderem erforderlich sein wird, wenn es sich um die Messung der Schwärzungsverteilung in langen linienreichen Spektren handelt. Weiter wird die Konstruktion so umzugestalten sein, daß das Übersetzungsverhältnis zwischen Fortschub der auszumessenden und Fortbewegung der die Registrierkurve aufnehmenden Platte während des ganzen Registriervorganges mit möglichster Genauigkeit konstant ist. Damit wird das Registrierinstrument

imstande sein, ohne umständliche Korrekturen die bisher ausschließlich mit Hilfe von Teilmaschinen ausgeführte Messung der Abstände von Spektrallinien in Spektren völlig automatisch auszuführen, wobei besonders bei unsymmetrischen Linien die bekannte, beim Messen mit Hilfe des Auges vorhandene Unsicherheit in der Schätzung der Lage des Schwärzungsmaximums wegfällt. Durch Vergleich der so gewonnenen Schwärzungskurven mit dem Schwärzungsverlauf im Spektrum des absolut schwarzen Körpers, das naturgemäß mit demselben Spektralapparat und auf dieselbe Platte unter denselben Expositionsbedingungen aufgenommen sein muß, ist es dann ohne weiteres möglich, neben der geometrischen Lage der Linien auch die Energieverteilung im Spektrum, unbeeinflusst vom Strahlengang und von der Absorption im Spektralapparat, sowie von der Energieempfindlichkeit der benutzten Trockenplatten anzugeben und der bisher üblichen nichtsagenden Art der Angabe der Intensität von Spektrallinien durch Zahlen zwischen 1 und 10 ein Ende zu machen. Die Arbeiten zur Umgestaltung des Apparates in den beiden besprochenen Richtungen sind im Gange. Über sie, sowie über die Durchführung der Energiedurchmessung von Linienspektren im eben angedeuteten Sinne soll später berichtet werden. Auch die Ergebnisse einer mit Hilfe des Registrierinstrumentes nunmehr mühelos durchführbaren und zum Teil schon durchgeführten Untersuchung über die Zufälligkeitslagerung der Silberkörner in entwickelten photographischen Platten, sowie die daraus zu ziehenden Folgerungen in bezug auf die Handhabung photographisch-photometrischer Messungen sollen in einer späteren Veröffentlichung mitgeteilt werden.

Das registrierende Mikrophotometer ist in der Werkstätte des Instituts gebaut worden, mit Ausnahme der Optik, des Uhrwerkes und des Elektrometers, von denen Uhrwerk und Elektrometer wegen Zeitmangels anderweit bezogen werden mußten.

Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Röntgen sage ich meinen besten Dank für die Erlaubnis zum Bau des Instrumentes in der Institutswerkstätte, sowie für sein ständiges Interesse während des Baues und der Prüfung des Instrumentes.



Ich hatte mich während des Baues von Anfang an der Mitarbeit des Institutsmechanikers Hrn. Aloysius Hörtensteiner zu erfreuen, von dem die meisten konstruktiven Einzelheiten der Anordnung stammen, und dem ich auch die Anregung zu dem zwar erfolgreichen, aber bis jetzt nicht erklärten Versuch verdanke, die Trägheit der Anordnung durch Zuschaltung der öfter erwähnten Zelle  $Z_3$ , Fig. 1, noch etwas herabzudrücken.

Den Bau des registrierenden Mikrophotometers hat die Firma Otto Toepfer & Sohn, Potsdam, Mammonstr., übernommen.

München, Physik. Institut der Universität, 6. Juli 1912

(Eingegangen 22. Juli 1912.)

**2. Ein lichtstarker, glasfreier stigmatischer  
Gitterspektrograph  
und seine Anwendung zur photographischen  
Bestimmung des roten und ultraroten  
Eisenbogenspektrums  
zwischen 6750 und 9809 Å.-E.;  
von Ludwig Geiger.**

§ 1. Einleitung.

Die verschiedenen zurzeit gebräuchlichen Methoden zum Nachweis eines Spektrums kann man in folgende zwei Gruppen teilen:

- a) *Absolute Methoden:*
  - 1. Thermoelement.
  - 2. Bolometer.
  - 3. Radiomikrometer.
- b) *Relative Methoden:*
  - 1. Okulare Beobachtung.
  - 2. Photographie.
  - 3. Phosphoreszenz.
  - 4. Phosphorophotographie.

Die Methoden der ersten Gruppe liefern die Energie als Funktion der Wellenlänge im absoluten Maße, während die Methoden der zweiten Gruppe wohl den Ort und die Struktur der Spektrallinien liefern, aber Schlüsse über die Energie als Funktion der Wellenlänge nur in sehr engen Spektralgebieten zulassen.

Wenn es sich nur darum handelt, die Wellenlänge der Spektrallinien zu bestimmen, so wird man im allgemeinen die relativen Methoden (b) bevorzugen, weil sie viel rascher zum Ziele führen. Nur wo diese Methoden versagen, wird man zu den mühsamen absoluten Methoden (a) greifen.

Ich hatte mir in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe gestellt, die Lage der Linien des roten und ultraroten Eisen-

bogenspektrums möglichst genau zu ermitteln, um so Standardlinien in diesem Spektralgebiet zu gewinnen, die späteren Arbeiten als Grundlage dienen können. Die Arbeit bildet also eine Fortsetzung derjenigen von Kayser und Runge, die das Eisenbogenspektrum von 2230—6750 Å.-E. photographisch erforscht haben.<sup>1)</sup> Von den vier relativen Methoden (b) mußte die okulare Beobachtung von vornherein außer Betracht fallen, weil das gut sichtbare Spektrum nur bis etwa 7200 Å.-E. reicht, also gegenüber Kayser und Runge nur eine unbedeutende Erweiterung ermöglicht hätte. Ich bemühte mich daher zuerst lange mit der phosphorographischen Methode, die auf folgender Tatsache beruht: irgend ein stark phosphoreszierender Schirm, etwa Sidotblende, wird durch ultraviolette Licht zu lebhaftem Leuchten erregt und dann sofort dem Wärmespektrum ausgesetzt; an den Stellen, wo eine Emissionslinie liegt, erlischt das Leuchten sehr rasch, während es an den übrigen Stellen noch einige Zeit anhält. Sowie ein deutliches Spektralbild auf dem Schirm hervorgerufen ist, wird der Schirm auf eine photographische Platte gelegt, die das Bild dann festhält. Nach dieser Methode hat z. B. A. Bergmann<sup>2)</sup> die Linienspektren der Alkalimetalle bis 17000 Å.-E. erforscht; er schätzt seine Fehlergrenze auf ca.  $\pm 10$  Å.-E. Bergmann hat mit einem groben Drahtgitter und hauptsächlich mit Prismen gearbeitet, während mir ein großes Rowlandsches Plangitter zur Verfügung stand, so daß ich viel lichtschwächere Spektren als Bergmann hatte. Aus diesem Grunde war es mir unmöglich, brauchbare Bilder zu erhalten, obgleich ich die Methode noch dahin erweitert hatte, daß der leuchtende Schirm beliebig oft auf eine und dieselbe photographische Platte gelegt werden konnte.

Es blieb mir also nur noch die photographische Methode übrig, mit der es mir dann auch durch geeignet hergestellte Platten gelungen ist, bis 9809 Å.-E. ebenso gute Spektrogramme zu erhalten, wie Kayser und Runge im gewöhnlichen photographischen Gebiete. Die Wellenlängen von 216 Linien wurden nach der Koinzidenzmethode an die vio-

1) H. Kayser u. C. Runge, Berl. Ber. 1888; H. Kayser, Ann. d. Phys. 3. p. 195. 1900.

2) A. Bergmann, Diss. Jena 1907.

letten Standardlinien angeschlossen, so daß die Unsicherheit der Resultate bei scharfen Linien höchstens einige Hundertstel Å.-E. beträgt, während Paschen<sup>1)</sup> mit dem Bolometer einen möglichen Fehler von  $1\frac{1}{2}$  bis 3 Å.-E. zuläßt. Von früheren Arbeiten seien die folgenden erwähnt: H. Lehmann<sup>2)</sup> hat photographisch im Eisenbogen bis 8690 Å.-E. 62 Linien gefunden und auf ca. 2 Å.-E. gemessen. Lord Blythwood und Scoble<sup>3)</sup> haben den Eisenbogen bis 8500 Å.-E. photographiert, aber keine Wellenlängen mitgeteilt. Kochen<sup>4)</sup> hat das Eisenspektrum bis 7586 Å.-E. photographiert und seine Resultate mit denjenigen früherer Autoren verglichen. In jüngster Zeit sind neue Wellenlängentabellen von Exner und Haschek<sup>5)</sup> erschienen, in denen sie den Eisenbogen bis 7187 Å.-E. mitteilen. In der Tabelle p. 782 sind die Resultate von Lehmann, Kochen und Exner und Haschek mit den meinigen zusammengestellt. Für die Aufnahmen habe ich einen lichtstarken stigmatischen Gitterspektrographen  $f = 1:15$  konstruiert, bei dem nur Silberspiegel und ein Rowlandsches Plangitter zur Verwendung kamen, so daß ich völlig frei von chromatischen Fehlern und selektiver Absorption war.

## § 2. Der Spektrograph.

Für den Bau des Spektrographen stand mir ein Rowlandsches Plangitter zur Verfügung, das von der Witwe des Kommerzienrates Hauswaldt in Magdeburg dem Göttinger Institut für theoretische Physik geschenkt worden war, und das mir dessen Direktor, Hr. Geh.-Rat W. Voigt, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt hat. Das Gitter besitzt 5 cm lange Striche und ist auf eine Breite von 8 cm geteilt. Am Rande ist eine Notiz eingraviert:

14438 lines to one inch

566 " " " mm.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 537. 1908; 29. p. 625. 1909.

2) H. Lehmann, Ann. d. Phys. 9. p. 1330. 1902.

3) Lord Blythwood u. W. A. Scoble, Astrophys. Journ. 24. p. 125. 1906.

4) E. Kochen, Zeitschr. f. wiss. Phot. 5. p. 287. 1907.

5) F. Exner u. E. Haschek, Die Spektren d. Elemente bei normalem Druck I. 1911.

Demnach besitzt das Gitter etwa 45000 Striche. Das Auflösungsvermögen  $\lambda/d\lambda$  ist die Fähigkeit, zwei in Wirklichkeit getrennte Spektrallinien getrennt abzubilden; es ist  $\lambda/d\lambda = m \cdot n$ , worin  $m$  die Anzahl der beleuchteten Gitterstriche,  $n$  die Ordnungszahl des Spektrums bedeutet. Die mittlere Wellenlänge des von mir untersuchten Gebietes ist 8000 Å-E., also:

Ordnung	$\frac{\lambda}{d\lambda}$	$d\lambda$ in Å-E.	$d\lambda$ in Teilen des Abstandes der D-Linien
1	45 000	0,18	1/33
2	90 000	0,09	1/67
3	135 000	0,06	1/100

Außer diesem Gitter hat mir Hr. Geh.-Rat Voigt einen aus Glas geschliffenen und auf der Vorderfläche versilberten sphärischen Hohlspiegel von 96 mm Durchmesser und ca. 85 cm Krümmungsradius anfertigen lassen. Der Spiegel besitzt also eine Lichtstärke von etwa 1:9. Es war somit möglich, völlig auf die Verwendung durchsichtiger Medien zu verzichten, so daß weder chromatische Abbildungsfehler, noch selektive Absorption solcher Medien zu berücksichtigen waren. In Fig. 1 ist der schematische Grundriß des Spektrographen gegeben, wie ich ihn zuerst ausgeführt habe.

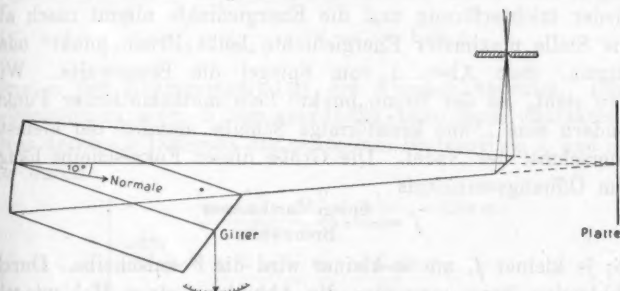


Fig. 1.

Vom Spalt fällt das divergente Licht auf einen feststehenden kleinen Planspiegel, der das Bündel um 90° ablenkt und unter 10° Einfallswinkel auf den feststehenden Hohl-

spiegel wirft; dieser macht das Bündel parallel und wirft es auf das Gitter. Das Gitter ist drehbar und besitzt einen auf Bogenminuten ablesbaren Teilkreis. Vom Gitter kommt das spektral zerlegte Licht als paralleles Bündel wieder auf den Hohlspiegel; dieser macht es konvergent und entwirft auf der Platte ein reelles Spektralbild. Damit dabei der kleine Planspiegel nicht im Wege steht, ist der Hohlspiegel ein wenig hinten übergeneigt, so daß das von ihm zur Platte laufende konvergente Bündel gerade ungehindert über den kleinen Planspiegel hinweggehen kann. Um die Leistungsfähigkeit dieser Spektralanordnung diskutieren zu können, muß ich einige Betrachtungen über den bei der Reflektion an Hohlspiegeln auftretenden Astigmatismus einschalten.

### § 3. Astigmatismus.

Wenn ein paralleles Lichtbündel symmetrisch auf einen sphärischen Spiegel trifft, oder mit anderen Worten: wenn das Licht parallel der in der Spiegelmitte errichteten Normalen läuft, so bilden die reflektierten Strahlen eine kaustische Fläche, die zur Spiegelnormalen Rotationssymmetrie besitzt. In der Symmetrieachse hat diese Fläche eine nadelartige Einschnürung, in der die Energiedichte sehr groß ist; mit wachsendem Abstand vom Spiegel erweitert sich die Nadel wieder trichterförmig und die Energiedichte nimmt rasch ab. Die Stelle maximaler Energiedichte heißt Brenn„punkt“ oder Stigma. Sein Abstand vom Spiegel die Brennweite. Wie man sieht, ist der Brenn„punkt“ kein mathematischer Punkt, sondern eine kleine kreisförmige Scheibe, nämlich der kleinste Querschnitt der Nadel. Die Größe dieser Fokalscheibe hängt vom Öffnungsverhältnis

$$f = \frac{\text{Spiegeldurchmesser}}{\text{Brennweite}}$$

ab; je kleiner  $f$ , um so kleiner wird die Fokalscheibe. Durch Abblenden kann man also die Abbildung eines Hohlspiegels verbessern, allerdings auf Kosten der Lichtstärke; wenn aber  $f$  etwa  $1/70$  wird, beginnt die Beugung am Spiegelrande bereits, sich unliebsam geltend zu machen. Die durch Beugung erzeugte Vergrößerung der Fokalscheibe ist ja umgekehrt proportional dem Öffnungsverhältnis  $f$ , so daß man

zur Erreichung der besten Abbildung einen Kompromiß zwischen diesen beiden Einflüssen treffen muß. Wir kommen also zu dem Resultat, daß wir dann eine punktförmige oder stigmatische Abbildung erhalten, wenn der Strahlengang *symmetrisch* zum Spiegel ist.

Wesentlich andere Verhältnisse entstehen jedoch, wenn der Strahlengang *unsymmetrisch* zum Spiegel erfolgt, d. h. wenn das einfallende parallele Bündel mit der mittleren Spiegelnormalen einen Winkel  $\varphi$  einschließt. In diesem Falle besitzt die entstehende kaustische Fläche keine Rotationssymmetrie, und es kann keine stigmatische Strahlenvereinigung mehr stattfinden. Um den Strahlengang zu verstehen, betrachten wir zunächst ein Spiegelement; dieses erzeugt ein *astigmatisches* Büschel, dessen Charakter Fig. 2 zeigt.

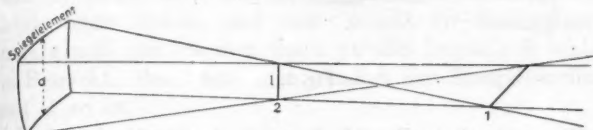


Fig. 2.

Die vom Hohlspiegel kommenden Strahlen erzeugen zwei Brennpunkte 1 und 2 in den Brennweiten  $s_1$  und  $s_2$ , und es gilt

$$(1) \quad s_1 = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}, \quad s_2 = \frac{r}{2} \cdot \cos \varphi,$$

worin  $r$  den Krümmungsradius des Spiegels bedeutet. Den Astigmatismus einer Spiegelanordnung kann man charakterisieren durch die Differenz der reziproken Brennweiten  $s_1$  und  $s_2$ , also durch

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{2}{r} \left( \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right) \\ \text{oder} \\ \frac{s_1 - s_2}{s_1 \cdot s_2} = \frac{2}{r} \cdot \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \\ = \frac{2}{r} \cdot \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi. \end{array} \right.$$

Wie man sieht, wächst der Astigmatismus eines Spiegelementes mit wachsendem Einfallswinkel außerordentlich rasch. Wir haben jetzt den Übergang vom Spiegelement zum end-



lichen Spiegel zu machen. Ein Spektralapparat mit unendlich kleinem Spiegel würde, abgesehen von der Beugung, einen Punkt in einer idealen Brennnlinie abbilden. Nicht so der endliche sphärische Spiegel; jedes seiner Flächenelemente besitzt eine andere Brennweite  $s_2$ , und die Gesamtheit der reflektierten Strahlen hüllt die schon auf p. 757 erwähnte kaustische Fläche ein (vgl. Fig. 3).

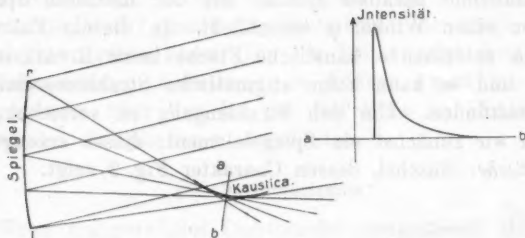


Fig. 3.

Eine eigentliche Brennnlinie existiert jetzt überhaupt nicht mehr; vielmehr sieht man auf einem Schirme  $ab$  eine unsymmetrische Intensitätsverteilung von dem in Fig. 3 rechts gezeichneten Charakter. Je kleiner das Öffnungsverhältnis des Spiegels ist, um so weniger wird sich die einseitige Verwaschung (= Coma) der Brennnlinie zeigen. In der Stellung  $ab$  der Fig. 3 steht der Schirm gerade an der engsten Einschnürung des Strahlenbündels, so daß man in dieser Lage die beste Abbildung erhält. Schiebt man jetzt von einer Seite, z. B. von rechts ( $r$  in Fig. 3) einen Schirm teilweise vor den Spiegel, so blendet dieser einen Teil der die kaustische Fläche erzeugenden Strahlen ab, und der Bildort rückt vom Spiegel weg. Läßt man andererseits den Einfallswinkel  $\varphi$  wachsen, so nähert sich nach Gleichung (1) der Bildort dem Spiegel. Man kann also den Einfluß der einen Variablen durch geeignete Variation der anderen Variablen beliebig modifizieren.

Die in Fig. 1 skizzierte Spektralanordnung ist demnach selbst bei einem unendlich kleinen Spiegel nicht imstande, einen leuchtenden Punkt als Punkt, sondern nur als Linie

abzubilden. Für viele spektrale Probleme, z. B. für Wellenlängenmessung, wäre dies kein Schaden, für andere jedoch, z. B. für die Untersuchung der Begleiterscheinungen des Zeemaneffektes oder für Untersuchungen nach dem Prinzip des Spektroheliometers ist eine stigmatische Abbildung unerläßlich. Dazu kommt noch ein zweiter, oft sehr wesentlicher Faktor, die *Lichtstärke*. Wie Fig. 2 zeigt, wird das von einem Lichtpunkt kommende Licht in einer Lichtlinie vereinigt, so daß die spezifische Helligkeit viel kleiner ist als bei stigmatischer Abbildung. Um die gleiche spezifische Helligkeit zu erzielen, wie bei stigmatischer Abbildung, muß man den Spalt auf eine solche Länge beleuchten, daß diese Länge der Länge  $l$  der astigmatischen Linie gleichkommt. Für einen Spiegel von mäßigem Öffnungsverhältnis gelten angenähert die Formeln (1) und (2); damit kann man aber die Länge  $l$  der astigmatischen Linie leicht finden, und zwar kommt für Spektralapparate naturgemäß nur die dem Spalt parallel liegende Brennlinie 2 in Betracht. Bezeichnet man nämlich den Spiegeldurchmesser mit  $d$ , so ist

$$\frac{l}{d} = \frac{s_1 - s_2}{s_1},$$

also wegen (1)

$$(3) \quad l = d \cdot \sin^2 \varphi.$$

Die nachstehende Tabelle zeigt, wie rasch bei dem Spiegeldurchmesser von 96 mm  $l$  mit wachsendem Einfallswinkel  $\varphi$  zunimmt:

$\varphi$ in Graden	2	4	6	8	10	20	30	40
$l$ in mm	0,12	0,47	1,06	1,85	2,90	11,2	24,0	39,8

Wenn nun die Lichtquelle selbst mindestens so ausgedehnt wie  $l$  ist, dann kann man allerdings den Spalt auf die Länge  $l$  erleuchten; ist die Lichtquelle jedoch kleiner, etwa ein Funke oder Lichtbogen, so verursacht der Astigmatismus unter allen Umständen einen sehr erheblichen Lichtverlust, der auch durch Anwendung einer Zylinderlinse zur Beleuchtung des Spaltes nicht verkleinert werden kann. Eine Zylinderlinse bildet wohl einen Punkt als Linie ab, aber aus den oben genannten Gründen ist die spezifische Helligkeit auf dem Spalt dann entsprechend kleiner, so daß man doch eine stigmatische Beleuchtungsvorrichtung bevorzugen wird.

Nach den Überlegungen dieses Paragraphen sind wir in der Lage, die Wirkung der in Fig. 1 gezeichneten Spektralanordnung zu diskutieren.

#### § 4. Der Spektrograph (Fortsetzung).

Bevor ich den Spektrographen (Fig. 1) ausführen ließ, habe ich an Hand der Überlegungen des vorigen Paragraphen den Strahlengang für die fünf Strahlenbündel berechnet, deren Hauptstrahlen an den Stellen 1, 2, 3, 4, 5 des Hohlspiegels (Fig. 1) reflektiert werden.<sup>1)</sup> Den einfachsten Fall bildet das Bündel 3: das vom Gitter kommende Parallelbündel erfüllt den ganzen Hohlspiegel, der Strahlengang entspricht also dem in Fig. 3 gezeichneten Fall. Wenn man den Strahlengang in natürlicher Größe zeichnet, schneiden sich die die kaustische Fläche bildenden Strahlen unter äußerst spitzen Winkeln, so daß man kein Urteil über die Bündelbreite am Bildort fällen kann. Ich habe deshalb den Strahlengang im Gebiete der Kaustika numerisch berechnet und in sehr starker Vergrößerung gezeichnet. Dann kann man leicht die Bündelbreite am Bildort messen. Den allgemeineren Fall, daß ein Teil des Hohlspiegels für das vom Gitter kommende Parallelbündel abgeblendet ist, bilden die Strahlenbündel 1, 2, 4, 5, und zwar kommt die Abblendung durch die Begrenzung von Gitter und Hohlspiegel zustande. Das Bündel 4 erfüllt z. B. den Spiegel nur von 2 bis 5, während 1 bis 2 kein Licht erhält; hier wirkt also der rechte Gitterrand als Schirm. Ebenso erfüllt das Bündel 2 den Spiegel nur von 1 bis 4, während 4 bis 5 durch den linken Gitterrand abgeschirmt wird. Man kann natürlich ebensogut sagen, daß nicht die Ränder des Gitters, sondern diejenigen des Spiegels als Schirm wirken.

Die so berechneten Bildorte schienen mir genügend scharf zu sein, um die Ausführung der Anordnung 1 zu rechtfertigen. Eine weitere Frage war die, in welcher Länge das Spektrum als eben aufgefaßt werden darf. Diese beiden Fragen ließen sich nur durch das Experiment entscheiden. Bei subjektiver Beobachtung mit der Lupe erschien mir die Abbildung nicht

1) Irrtümlicherweise fehlen diese Zahlen in Fig. 1; es ist 1 am oberen, 5 am unteren Rande, 3 in der Mitte des Hohlspiegels einzutragen; 2 liegt zwischen 1 und 3, 4 zwischen 3 und 5.

schlecht, denn ich konnte die Struktur der roten Banden des Sonnenspektrums deutlich erkennen. Dagegen waren auch die besten Photographien völlig unscharf. Dieser scheinbare Widerspruch kommt wohl daher, daß bei der subjektiven Beobachtung gar nicht alle Strahlen ins Auge treten, sondern durch die Pupillenränder einseitig abgeblendet werden, wodurch das Bild schärfer wird.

Für die vorliegende Aufgabe mußte ich daher die Spektralanordnung (Fig. 1) verwerfen, und ich bemühte mich nun, eine möglichst stigmathische Anordnung zu finden. Nach § 3 konnte dies nur durch symmetrischen Strahlengang erreicht werden. Fig. 4 zeigt oben im Grundriß, unten im Aufrisse schematisch die neue Anordnung, die sich dann recht gut bewährt hat.

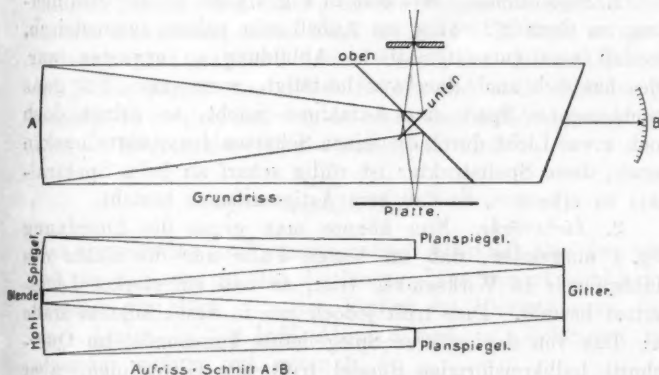


Fig. 4.

1. *Strahlengang.* Vom Spalt fällt das divergente Licht auf einen feststehenden kleinen Planspiegel, der das Bündel um  $90^\circ$  ablenkt und senkrecht auf die untere Hälfte des feststehenden Hohlspiegels wirft. Dieser macht das Bündel parallel und wirft es über den kleinen Planspiegel weg auf das drehbare Gitter. Das vom Gitter spektral zerlegte Parallelbündel trifft die obere Hälfte des Hohlspiegels; diese macht das Bündel konvergent und wirft es unter  $45^\circ$  auf einen feststehenden Planspiegelstreifen, der das Bündel um  $90^\circ$  ablenkt,

so daß auf der Platte ein reelles Spektrum erzeugt wird. Damit kein unzerlegtes Licht direkt auf die obere Spiegelhälfte und somit auf die Platte gelangen kann, ist der Spalt nach unten begrenzt, und zwar in solcher Höhe, daß ein Strahl, der, vom unteren Spaltende kommend, am oberen Rande des unteren Planspiegels reflektiert wird, den Hohlspiegel gerade in halber Höhe trifft. Dann treffen alle von höher liegenden Spaltpunkten ausgehenden Strahlen nur die untere Hohlspiegelhälfte. Zur Sicherheit sind die beiden Hohlspiegelhälften durch einen 8 mm breiten schwarzen Papierstreifen getrennt. Dieser erfüllt die Funktion einer horizontalen schwarzen Scheidewand, deren Verwendung ja nicht möglich ist, weil sich die zum und vom Gitter laufenden Bündel gegenseitig durchdringen.

2. *Stigmatismus.* Wie man in Fig. 4 sieht, ist der Strahlengang im Grundriß völlig, im Aufriß sehr nahezu symmetrisch, so daß eine gut stigmatische Abbildung zu erwarten war. Dies hat sich auch durchaus bestätigt: wenn man bei ganz geschlossenem Spalt eine Aufnahme macht, so dringt doch noch etwas Licht durch die feinen Scharten der Spektralbacken durch; diese Spaltstruktur ist völlig scharf an jeder Spektrallinie zu erkennen, so daß kein Astigmatismus besteht.

3. *Lichtstärke.* Nun könnte man gegen die Anordnung Fig. 4 einwenden, daß im besten Falle nur die Hälfte des Hohlspiegels in Wirksamkeit tritt, so daß ein starker Lichtverlust besteht. Dies trifft jedoch nur in beschränktem Maße zu: Das von der unteren Spiegelhälfte kommende, im Querschnitt halbkreisförmige Bündel trifft alle Gitterlinien, aber keine außerhalb liegenden Teile; es erfüllt aber auch fast die ganze geteilte Fläche von  $5 \times 8$  cm. Das vom Gitter auf die obere Spiegelhälfte fallende Bündel hat den gleichen halbkreisförmigen Querschnitt. Sein Halbkreis liegt aber umgekehrt wie der Halbkreis der oberen Spiegelhälfte, so daß jetzt ein Lichtverlust dadurch eintritt, daß die Ecken des ankommenden Halbkreises den Spiegelhalbkreis nicht treffen. Man erhält ein Optimum der Lichtstärke, wenn der horizontale schwarze Streifen nicht symmetrisch zum Hohlspiegel liegt, sondern  $2\frac{1}{2}$  mm tiefer. In diesem Falle werden 64 Proz. der überhaupt möglichen Lichtstärke erreicht. Die überhaupt

mögliche Lichtstärke berechnet sich folgendermaßen: Die geteilte Gitterfläche ist  $5 \times 8 = 40$  cm; dies entspricht einem Kreise von 7,1 cm Durchmesser; bei einem Krümmungsradius des Hohlspiegels von 85 cm ist also die größte mögliche Lichtstärke  $= 7,1/85 = 1:12$ . Im vorliegenden Falle beträgt sie 64 Proz. davon, also 1:15, denn es ist  $12^2:15^2 = 64:100$ . Dies scheint mir bei Verwendung eines einzigen Hohlspiegels ein recht günstiges Resultat zu sein. Die Spektralanordnung Fig. 4 ist aber in erster Linie darum so sehr lichtstark, weil sie stigmatisch ist und also kein Lichtverlust durch Verlängerung der Spektrallinien eintritt. (Vgl. Tabelle p. 759.)

Die Berechnung des Optimums für die Lichtstärke läßt sich auf graphischem Wege leicht ausführen.

4. *Auflösungsvermögen.* Ich habe das Auflösungsvermögen dadurch geprüft, daß ich die im Kohlebogen auftretende ultraviolette Cyanbande, deren Kopf bei 3884 Å.-E. liegt, in vierter Ordnung photographiert habe. Unter dem Mikroskop zeigt die Platte Linien von  $1/6$  Å.-E. Abstand noch deutlich getrennt. In vierter Ordnung ist aber das Auflösungsvermögen  $\lambda/d\lambda = 180000$ , also für  $\lambda = 4000$  Å.-E. wird

$$d\lambda = \frac{4000}{180000} = \frac{1}{45} \text{ Å.-E.}$$

Das theoretische Auflösungsvermögen übertrifft also das wirklich beobachtete um das  $6\frac{1}{2}$  fache. Dies kommt wohl hauptsächlich von dem störenden Einfluß des Plattenkornes, denn zwei Linien in  $1/6$  Å.-E. Abstand sind nur 0,036 mm voneinander entfernt (vgl. unten 5.).

5. *Dispersion.* Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Größe der Dispersion in den verschiedenen Ordnungen, und zwar gibt sie links an, wieviel Å.-E. im Mittel in jeder Ordnung auf 1 mm der Platte kommen, rechts gibt sie die Länge an, der 1 Å.-E. entspricht:

Ordnung	1 mm = Å.-E.	1 Å.-E. = mm
1	18,5	0,054
2	9,25	0,106
3	6,17	0,162
4	4,63	0,216
5	3,70	0,270

6. *Spaltblenden.* Eine große Annehmlichkeit der stigmatischen Anordnung ist der Umstand, daß man Spaltblenden verwenden kann. H. Kayser<sup>1)</sup> warnt zwar davor, und offenbar dann mit Recht, wenn der beleuchtete Spalt von der Größenordnung des Objektiv- bzw. Spiegeldurchmessers ist. Im vorliegenden Falle handelt es sich jedoch um sehr kleine Lichtquellen (ca. 1 mm), die in natürlicher Größe auf dem Spalt abgebildet werden, während die als Objektiv wirksame Spiegelhälfte eine Höhe von ca. 44 mm besitzt. Wegen des vor dem Hohlspiegel angebrachten 8 mm breiten Streifens ist es sogar möglich, die Höhe des Bildes auf dem Spalt um ca. 1 mm zu variieren, ohne daß Teile des Spiegels dadurch kein Licht erhielten. Zur Sicherheit habe ich mich aber auch durch Photogramme davon überzeugt, daß durch die Anwendung der Spaltblenden keinerlei meßbare Linienverschiebung

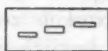


Fig. 5.

auftritt. Fig. 5 zeigt die verwendete Spaltblendeneinrichtung. Vor dem Spalt ist ein kleiner Metallschlitten befestigt, in dem sich ein dünnes Blech von der in Fig. 5 bezeichneten Form horizontal verschieben läßt. Das Blech hat drei verschieden hoch liegende Fenster, deren mittleres 1,0 mm, die beiden anderen je 0,5 mm hoch sind, und die so liegen, daß die Verlängerung der horizontalen Ränder des mittleren Fensters gerade die Ränder der äußeren Fenster trifft. Indem man sukzessive die drei Fenster vor die Spaltöffnung schiebt, kann man so sehr bequem ein zu untersuchendes Spektrum zwischen ein bekanntes Vergleichsspektrum einschließen. Das gesamte Spektralbild ist dann nur 2 mm hoch, was aber zur Ausmessung unter dem Komparator völlig ausreicht.

7. *Die Kassette.* Diese wurde so konstruiert, daß sie sowohl für die phosphorographische Methode als auch für direkte Photographie verwendet werden kann. Ihr Prinzip zeigt Fig. 6, und zwar in der Anordnung, wie sie für die phosphorographische Methode verwendet wurde. An einer Vertikalwand steht der Phosphoreszenzschirm; unter ihm liegt horizontal die verschließbare Kassette, Platte nach oben. Die Kassette ist um eine Horizontalachse drehbar und kann durch eine

1) H. Kayser, Handb. d. Spektroskopie 2. p. 538.



Schnur betätigt werden. Durch eine Zinkfunkenstrecke wird der Phosphoreszenzschirm zunächst zum Leuchten erregt und dann mit dem ultraroten Spektrum bestrahlt. Nachdem auf dem Schirm ein Spektralbild entstanden ist, wird die

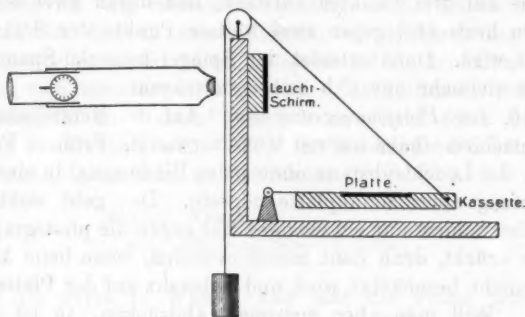


Fig. 6.

Kassette geöffnet, hochgezogen und durch ein Gewicht fest gegen den Schirm gepreßt. Auf diese Weise kann man den Prozeß beliebig oft wiederholen. Die einzige Bedingung ist die, daß die Kassette sehr exakt gelagert ist. Dies konnte jedoch durch Kugelspitzenlager sehr gut erreicht werden. Will man direkt photographieren, so entfernt man den Phosphoreszenzschirm und schraubt die Kassette umgekehrt zwischen die Kugelspitzen, so daß die Platte nach unten sieht; dann bringt man die Kassette in die Vertikalstellung und kann photographieren.

8. *Das Mikroskop.* Zu subjektiven Messungen dient ein Mikroskop mit Okularfadenmikrometer, mit dem man durch ein Loch in der Vertikalwand das Spektrum beobachten kann. Dadurch, daß man die Kassette herunterlassen kann, ist man während einer photographischen Aufnahme jederzeit imstande, das Spektrum vorübergehend subjektiv zu betrachten, was bei unruhig brennenden Lichtquellen oft höchst angenehm ist. Die Schraube des Mikrometers hat 0,2 mm Ganghöhe, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, so daß man noch  $0,2 \mu$  schätzen kann.

9. *Der Planspiegelstreifen.* Die spiegelnde Fläche des oberen streifenförmigen Planspiegels (Fig. 4) mißt  $2\frac{1}{2} \times 19$  cm. Dieser Spiegel machte dadurch ziemliche Schwierigkeiten, weil es sich

bei der genauen Fokussierung des Apparates zeigte, daß sich die Form des Streifens zeitlich verändert, was natürlich die Fokussierung verdirbt. Ich bekam erst gute Resultate mit einem 13 mm dicken Spiegel, der auf einer starken Winkelschiene auf drei Punkten aufsteht, und durch zwei schwache Federn horizontal gegen zwei weitere Punkte der Schiene gedrückt wird. Dann erleidet der Spiegel keinerlei Spannungen, er hat vielmehr nur sich selbst zu tragen.

10. *Der Phosphoreszenzschirm.* Auf die Herstellung guter Leuchtschirme habe ich viel Mühe verwandt. Frühere Forscher haben die Leuchtsubstanz ohne jedes Bindemittel in eine flache Vertiefung einer Metallplatte gepreßt. Das geht wohl, wenn man den Schirm nur ein einziges Mal gegen die photographische Platte drückt, denn dann macht es nichts, wenn beim Abheben die Schicht beschädigt wird und Substanz auf der Platte liegen bleibt. Will man aber mehrmals abdrücken, so ist es unbedingt nötig, daß der Schirm unversehrt bleibt. Ich habe sehr viele Methoden probiert, gute, d. h. glatte und hellleuchtende Schirme herzustellen; ich will hier nur die beste mitteilen: Man legt auf eine Spiegelglasplatte ein tadelloses Blatt Stanniol und walzt dieses mit einem Gummirollenquetscher, wie man ihn zum Satinieren photographischer Papiere verwendet, fest auf das Glas. Dann rührt man die Leuchtsubstanz mit einer ca. 3 prozentigen wäßrigen Gelatine-lösung zu einem dünnen Brei an, und gießt diesen gleichmäßig auf das Stanniol; nach einem Tage ist der Teig völlig hart geworden. Dann bestreicht man ein Messingblech, das das Format des künftigen Leuchtschirmes besitzt, mit Syndetikon, legt es auf den erstarrten Teig, beschwert und läßt einen Tag trocknen. Dann durchschneidet man mit einem scharfen Messer rings um die Platte die Leuchtsubstanz und das Stanniol, so daß man den Schirm jetzt vom Glas abheben kann. Jetzt löst man vorsichtig eine Ecke des Stanniols und kann dann den ganzen Stanniolbelag vom Schirme abziehen. Das Stanniol soll ziemlich dünn sein und beim Abziehen ziehe man so, wie Fig. 7 zeigt



Fig. 7.

Auf diese Weise habe ich sehr schöne widerstandsfähige Schirme hergestellt, deren Leuchtkraft im Vergleich zur reinen Substanz durch das Bindemittel kaum merklich gelitten hatte.

11. *Die Ultrarotplatte.* Zur Herstellung der Ultrarotplatte verwendete ich als Sensibilisator *Dicyanin*<sup>1)</sup>, dessen starke Fähigkeit, für Rot zu sensibilisieren, ich schon früher<sup>2)</sup> mit gutem Erfolg verwertet hatte. Dicyanin ist ein kristallinischer, im Licht sich zersetzender Farbstoff. Zum Gebrauch löst man 0,1 g Dicyanin in 100 cm<sup>3</sup> Alkohol und hebt diese Lösung (1:1000) im Dunkeln auf. Will man Trockenplatten sensibilisieren, dann badet man sie 3 Minuten in

200 cm<sup>3</sup> Wasser,

4 „ Dicyaninlösung (1:1000),

wäscht 3 Minuten in Wasser und läßt die Platte trocknen. Diese Operationen sind im Dunkeln auszuführen. Wenn man die Platte an offener Luft trocknet, so dauert dies immerhin einige Stunden, und während dieser Zeit verdirbt die Emulsion schon teilweise, d. h. nach dem Entwickeln zeigt sie schwarze Flecken. Aus diesem Grunde habe ich früher<sup>3)</sup> und auch anfangs bei der vorliegenden Arbeit die Platten sofort nach dem Waschen naß exponiert, ein Verfahren, das ja in der Reproduktionstechnik immer noch bevorzugt wird. Nach der Exposition wird sofort im Dunkeln entwickelt und fixiert, was keinerlei Schwierigkeiten macht. Bei Spektralaufnahmen, die in dieser Weise auf nasse Platten aufgenommen waren, zeigte sich jedoch eine höchst merkwürdige Eigenschaft der sensibilisierten Emulsion: das rote Eisenspektrum erster Ordnung war stets unscharf, während das dicht daneben liegende Violettpektrum zweiter Ordnung völlig scharf war. Ich glaubte erst, daß diese Unschärfe durch Reflexe an der Plattenrückseite entsteht, und zwar nur bei Rot, weil die Emulsion das Violett absorbiert und also gar nicht bis zum Glas gelangen lasse. Die Unschärfe des Rot blieb aber völlig unverändert, wenn ich die Platten mit schwarzem Mattlack hinterkleidete.

1) Von Meister Lucius & Brüning, Höchst a. M. 0,1 g 3 Mk.

2) L. Geiger, Ann. d. Phys. 23. p. 759. 1907.

3) L. Geiger, l. c.

Ebenso blieb die Unschärfe quantitativ gleich, wenn man hinter die Platte eine klare Glasplatte kittete; wenn es sich um Reflexe an der Hinterwand handeln würde, so müßte bei der dickeren Platte die Unschärfe entsprechend größer werden. Es konnte sich also nur um eine Art Diffusion des roten Lichtes in der gequollenen Emulsion selbst handeln. Das scheint zwar der Theorie der Diffusion des Lichtes zu widersprechen, denn nach Rayleigh ist die Diffusion proportional  $1/\lambda^4$ , wobei  $\lambda$  größer als die beugenden Teilchen vorausgesetzt ist; die Diffusion ist in diesem Falle also in Violett 16 mal so groß als im Rot. Es ist jedoch zu beachten, daß die Emulsion nicht farblos ist; wenn man sie spektroskopisch prüft, sieht man, daß sie Violett fast gar nicht, Rot und Gelb aber sehr gut durchläßt. Zudem weiß ich nicht, ob die Voraussetzung zutrifft, daß  $\lambda$  größer als die beugenden Teilchen ist. Auf jeden Fall muß die Diffusion der dünneren Emulsion geringer sein, d. h. bei getrockneten Platten. Eine an offener Luft getrocknete Platte bestätigte nun durchaus diese Überlegung, sie lieferte ein völlig scharfes Rotspektrum; leider zeigte sie auch die oben erwähnten Flecken. Ich habe deshalb verschiedene künstliche Trocknungsmethoden ausprobiert. Die sonst bei photographischen Platten geübte Alkoholtrocknung wird zwar von den Höchster Farbwerken empfohlen, ich konnte sie jedoch nicht anwenden, weil die Rotempfindlichkeit der Platte leidet. Trocknen über Schwefelsäure u. dgl. greift die Platte an, Erwärmen ist sehr riskiert, weil die Emulsion schon bei ca. 35° C. schmilzt; im Vakuum auch in Gegenwart chemischer Trocknungsmittel trocknet die Platte überhaupt nicht, weil sie sich so sehr abkühlt, daß sie sich mit Reif bedeckt, der weiteres Verdunsten verhindert. Schließlich kam ich zu der folgenden Methode, die sich gut bewährt hat, weil sie rasch und sicher arbeitet: Man erwärmt im Wasserbad einen Kupferklotz (Fig. 8) auf ca. 22° C. Die obere Fläche dieses Klotzes hat die Dimensionen der photographischen Platte und ist ringsum von einem dünnen Blechrand überragt, der es ermöglicht, die Platte im Dunkeln genau aufzulegen. Damit man die Platte leicht abnehmen kann, hat der Blechrand zwei Ausschnitte. Die Temperatur des Wasserbades wurde automatisch durch ein Luftthermometer reguliert.

Im Wasserbade liegt ein einseitig geschlossenes luft-erfülltes Glasrohr, dessen anderes Ende U-förmig gebogen und durch Hg gesperrt ist. Auf der Öffnung steckt ein verschiebbarer Kork, durch den zwei Nadeln gesteckt sind. Das Wasser wird durch ein elektrisches Heizgitter erwärmt, wodurch das

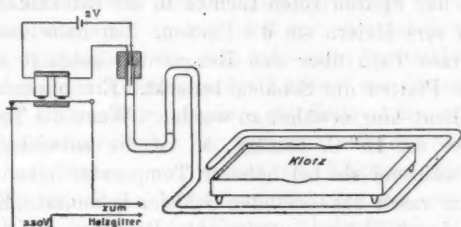


Fig. 8.

Quecksilber im U-Rohr steigt und die Nadeln berührt. Dadurch wird ein Relais betätigt, das den Heizstrom so lange unterbricht, bis das Quecksilber den Relaisstrom wieder unterbricht. Mit diesem Thermostaten kann man die Wassertemperatur auf einen Bereich von etwa  $3^{\circ}$  regulieren.

Wenn die photographische Platte im Dunkeln fertig sensibilisiert ist, nimmt man den Klotz aus dem Wasser, trocknet ihn ab und legt ihn auf den Teller eines Rezipienten; dann wischt man mit dem Handballen das Wasser von der Rückseite der photographischen Platte, legt diese auf den Klotz, setzt die Glocke auf den Rezipiententeller und evakuiert eine halbe Stunde auf ca. 5 mm Hg. Der warme Klotz verhindert, daß sich die Platte stark abkühlt, andererseits riskiert man kein Schmelzen der Emulsion. Nach einer halben Stunde ist die Platte völlig trocken und kann exponiert werden. Die so getrockneten Platten sind ebenso rot empfindlich wie die nassen, sie sind fleckenlos und längere Zeit haltbar. Auf den ersten Blick scheint die Herstellung der Platten recht mühsam zu sein, weil alle Operationen im Dunkeln ausgeführt werden müssen. Es ist mir aber nie eine Platte bei der Herstellung mißglückt. Es ist sehr vorteilhaft, wenn man das Wasserbad für den Klotz und die Pumpenanlage in einem hellen Zimmer neben der Dunkelkammer aufstellt und eine Vakuumleitung

zu dem in der Dunkelkammer befindlichen Rezipienten führt. Wenn die Pumpe durch einen Motor betrieben werden kann, kann man während der zum Trocknen nötigen halben Stunde etwas anderes tun.

Die sensibilisierte Platte ist äußerst rot-empfindlich; wenn also auch nur Spuren roten Lichtes in die Dunkelkammer gelangen, so verschleiern sie die Platten. Ich habe darum stets ein schwarzes Tuch über den Rezipienten gehängt und beim Baden der Platten die Schalen bedeckt. Ein besonderer Umstand verdient hier erwähnt zu werden. Wenn die Temperatur des Klotzes ca.  $15^{\circ}\text{C}$ . beträgt, so ist die entwickelte Platte glasklar, während sie bei höherer Temperatur einen mit der Temperatur rasch zunehmenden Schleier bekommt. Es ist dies also eine durch Wärme verursachte Reizung, die äquivalent mit einer Belichtung ist. Wenn man lichtschwache Bilder photographieren will, bei denen eine mehrstündige Exposition nötig ist, benutzt man mit Vorteil vor- oder nachbelichtete Platten, d. h. Platten, die kurze Zeit schwachem, diffusum Lichte ausgesetzt worden sind. Der durch die Vorbelichtung verursachte Schleier soll gerade auf der Grenze zwischen Unter- und Normalexposition liegen. Dann wirkt die ganze darüber photographierte Energie im Gebiete der Normalexposition, und bringt also wesentlich rascher gute Kontraste hervor, als wenn die nicht vorbelichtete Platte erst das Gebiet der Unterexposition durchlaufen müßte. Wood<sup>1)</sup> sagt, daß er vorbelichtete Platten nur halb solange exponieren müsse. Nun ist es natürlich einerlei, ob die Platte optisch oder thermisch gereizt worden ist. Ich habe deshalb durch Variation der Trocknungstemperatur als günstigste Temperatur die oben erwähnten  $22^{\circ}\text{C}$ . ermittelt. Der dann entstehende Schleier stört bei guter Beleuchtung des Komparators nicht im geringsten.

12. *Konstruktives*. Alle Teile des Spektrographen sind auf einer mit schwarzem Samt beklebten Marmorplatte aufgeschraubt. Der Spalt ist fest in eine Messingwand geschraubt und nur mit dieser etwas verrückbar; so riskiert man keine Ortsveränderung des Spaltes während einer Aufnahme und vor

1) R. W. Wood, *Physik. Zeitschr.* 9. p. 355. 1908.

allem zwischen den Aufnahmen des Rot und der Vergleichsspektren. Alle anderen Teile, also Gitter, Hohlspiegel, Kassette, Mikroskop und die beiden Planspiegel sind in einfacher Weise justierbar. Über den ganzen Apparat wird ein Holzkasten gestülpt, der innen mit schwarzem Samt ausgekleidet ist und dessen untere Kanten mit Wülsten aus Samt versehen sind. Diese Dichtung wirkt so gut, daß ich selbst bei einer achtstündigen Exposition das Zimmer nicht verdunkeln mußte. Damit man beim Aufstülpen des Kastens mit diesem nicht an das Gitter oder andere empfindliche Teile stößt, sind auf der Marmorplatte vier Säulen festgeschraubt, die den vier Vertikalkanten des Kastens von innen als Führung dienen. Der Kassettenschiebedeckel kann durch Schnüre auf- und zugemacht werden, ohne daß man den Kasten abheben muß. Die Drehung des Gitters erfolgt ebenfalls von außen.

13. *Justierung.* Die Justierung der Teile geht sehr rasch: man bringt die Spaltblende in die Höhe des unteren Planspiegels und dirigiert diesen so, daß die untere Hälfte des Hohlspiegels voll beleuchtet ist, aber die obere Hälfte gar kein Licht erhält. Man neigt den Hohlspiegel, bis das Parallelbündel die geteilte Gitterfläche erfüllt. Man dreht das Gitter so, daß es senkrecht beleuchtet wird und neigt es, bis das vom Gitter reflektierte Parallelbündel die obere Hälfte des Hohlspiegels erfüllt. Man neigt den oberen Planspiegel, bis auf der Kassette das Spektrum horizontal liegt.

14. *Fokussierung.* Die Fokussierung kann subjektiv oder photographisch vorgenommen werden. Dazu ist die Kassettenstellung an zwei links und rechts befindlichen Skalen ablesbar. Zur subjektiven Fokussierung legt man in die Kassette statt einer Platte einen weißen Schirm ein, der eine horizontale cm-Skala besitzt. Man dreht das Gitter so, daß das direkte Spaltbild auf den Schirm fällt und fokussiert durch Verschieben der Kassette, indem man das Bild mit einer Lupe betrachtet. Ist das Bild scharf, so liest man beide Kassettenskalen ab; so fokussiert man für jeden Punkt der Schirmskala und kann die Form der Fokalkurve in folgender Weise berechnen: In Fig. 9 bezeichnet  $l$  und  $r$  die Ablesung an der linken und rechten Kassettenskala. Die beiden Skalen haben von der Schirmmitte den Abstand  $E$ , der Punkt, für den



fokussiert wurde, den Abstand  $\varepsilon$ ;  $h$  sei die gesuchte Ordinate der Fokalkurve. Dann ist

$$\frac{h-r}{l-r} = \frac{E+s}{2E},$$

also

$$(4) \quad h = \frac{E+s}{2E} \cdot (l-r) + r.$$

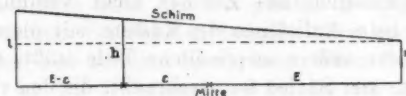


Fig. 9.

Stellt man viermal ein, so erhält man  $h$  schon bis auf  $\pm 0,2$  mm. Will man photographisch fokussieren, so macht man eine Reihe von Aufnahmen des Eisenspektrums, wobei man jedesmal die Kassette um 1 mm versetzt. Man markiert dann auf den Platten eine cm-Skala und sucht mikroskopisch für jeden dieser Skalenpunkte diejenige Platte aus, auf der diese Spektralspartie am schärfsten ist. Wenn keine ganz scharfe Platte für einen Punkt vorliegt, so vergleicht man die Schärfe der beiden besten Platten und schätzt, wo eine scharfe Platte zwischen diesen beiden liegen würde. Ist z. B. die eine Platte dreimal so unscharf wie die andere, so liegt die erste Platte dreimal so weit vom Fokus wie die andere. Schließlich berechnet man die  $h$  nach (4). Diese Methode hat den Vorteil der Objektivität, dauert aber wegen der vielen Spektrogrammaufnahmen länger; sie liefert  $h$  auf  $\pm 0,1$  mm.

Es zeigte sich, daß bei Verwendung eines guten oberen Planspiegels (vgl. p. 765) die Fokalkurve bis zu einer Länge von 10 cm sehr angenähert *geradlinig* verläuft. Dies scheint Gleichung (1) zu widersprechen, wonach die Fokalkurve gegen den Hohlspiegel zu konkav sein sollte; die Erscheinung findet aber ihre Erklärung in der korrigierenden Wirkung der seitlichen Ränder von Gitter und Hohlspiegel (vgl. p. 758), die offenbar im vorliegenden Falle die Fokalkurve zu einer Geraden deformieren. Dieser Umstand ist höchst angenehm, weil er die Anwendung 10 cm langer photographischer Platten gestattet. Die günstigste Kamerastellung findet man, indem man durch die Punkte der

Fokalkurve eine Gerade legt, die die Richtung der Kassette liefert.

Um die Fokussierung noch weiter zu verfeinern, verwendet man mit Vorteil das Mikroskop. Schon fünf Einstellungen liefern den Fokus der Plattenmitte auf  $\pm 0,05$  mm. Um die photographische Platte genau an diesen Fokus zu bringen, ist die Rückseite der Kassette durchbohrt. Man legt dann in die Kassette eine kleine Glasplatte, deren eine Kante das Gesichtsfeld des Mikroskops halbiert. Auf die dem Hohlspiegel zugewandte Glasseite ist ein 0,05 mm dicker Haardraht geklebt, der ca.  $\frac{1}{5}$  mm über die Glaskante hervorragt und genau in der verlängerten Ebene der Glasfläche liegt. Man verschiebt dann bei festgeklemmtem Mikroskoptubus die Kassette, bis im Mikroskop das freie Drahtende scharf erscheint, liest die Kassettenskalen  $l$  und  $r$  ab und berechnet  $h$  für die Kassettenmitte nach (4). Dann berechnet man die Skalenergebnisse  $l$  und  $r$ , die nötig sind, damit die Kassette die vorher subjektiv oder photographisch gefundene Richtung erhält.

Es erscheint vielleicht überflüssig, die Fokussierung so sorgfältig auszuführen, aber bei der Lichtstärke des Instrumentes läßt ein Fokusfehler von 0,1 mm eine ideale Spektrallinie schon um 0,01 mm verbreitert erscheinen; dem entspricht aber nach p. 763 in erster Ordnung schon 0,2 Å.-E.

15. *Spaltbeleuchtung.* Die Spaltbeleuchtung erfolgt nur durch Spiegel, ist also ebenso wie der eigentliche Spektrograph frei von chromatischen Fehlern. Bevor ich die Beleuchtungsvorrichtung beschreibe, will ich eine Fehlerquelle erwähnen, deren Beseitigung sehr wichtig ist. Wenn man einen Lichtbogen mit einem Hohlspiegel auf den Spalt projiziert, so erhält man bei engem Spalt und langer Expositionszeit ganz unscharfe Spektrogramme, während kurzbelichtete Spektren mit weiterem Spalt scharf werden. Die Ursache liegt in der Erwärmung des Spaltes und des Gitters. Dadurch verändert der Spalt seine Lage und auch die Gitterkonstante kann sich ändern. Mit dem Okularfadenmikrometer konnte ich direkt ein rasches Wandern der Spektrallinien messen, und zwar bewegte sich eine Linie in einem Falle in 5 Min. um 0,2 mm. Schaltet man dagegen eine 5 cm dicke Wasserschicht ein, so verschwindet das Wandern völlig. Für Unter-

suchungen in ultraviolettem Spektralgebiet ist dies Mittel aber ganz unbrauchbar, weil das Wasser und Glas alles absorbieren. Dagegen hat sich die in Fig. 10 gezeichnete völlig absorptionsfreie Einrichtung sehr gut bewährt.

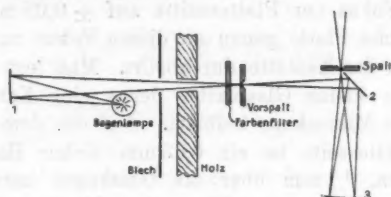


Fig. 10.

Der Hohlspiegel 1 entwirft auf einem Vorspalt ein vergrößertes Bild des Bogens, und der Vorspalt läßt nur einen schmalen Streifen Licht passieren. Mittels des Planspiegels 2 und des Hohlspiegels 3 wird ein verkleinertes Bild des Vorspaltes auf den Hauptspalt projiziert, der jetzt nur unschädlich erwärmt wird. Der Vorspalt darf 0,4 mm weit sein. Der Planspiegel 2 ist notwendig, damit der Hohlspiegel 3 ein stigmatisches Bild erzeugt.

Der Lichtbogen ist in einen oben und unten offenen Blechkamin eingeschlossen und beleuchtet den Hohlspiegel 1 nur durch ein kleines Loch im Kamin. Dies ist darum nötig, weil ein brennender Eisenbogen stark dampft und fortwährend glühende Eisenteilchen spritzt, wodurch die Versilberung des Spiegels 1 im Augenblick trüb würde. Durch den Kamin entsteht eine kräftige vertikale Ventilation, und ein dauernd laufender Ventilator schafft den Dampf so rasch aus dem Zimmer, daß man auch nach stundenlangem Betriebe nichts riecht. Eine Blech- und eine Holzwand schützen den Spektrographen gegen die Wärmestrahlung der Bogenlampe.

Es mag hier eine merkwürdige Tatsache erwähnt werden. Zur Erzeugung des Eisenspektrums ließ ich den Bogen zwischen zwei vertikalen Schmiedeeisenstäben brennen, deren Abstand von Hand regulierbar ist. Wenn der Bogen mit 65 Volt und ca. 11 Amp. brennt, reguliert er stundenlang seine Länge von selbst. Dies kommt so zustande: Der obere Eisenstab ist Anode; es wird also vom Strom dauernd Eisen vom oberen

zum unteren Stabe transportiert, wobei ein Teil verbrennt. Der Rest baut sich auf dem unteren Stabe als lockeres, lavaartiges Eisen auf, und zwar ist seine Volumenvermehrung geradeso groß, daß sie den Verlust durch Verbrennung kompensiert, d. h. die Bogenlänge bleibt konstant. Freilich wandert der Ort des Bogens allmählich in die Höhe; jedoch beträgt diese Wanderung in 8 Stunden nur 2 cm. Man braucht also nur ganz selten mit dem Hohlspiegel 1 das Bild des Bogens auf dem Spalte nachzuregulieren. Wenn der Bogen durch irgend einen Umstand erloschen ist, so soll man das poröse Eisen nicht entfernen, sondern die Elektroden so lange gegeneinander drehen, bis sie zünden, dann brennt der Bogen sofort ruhig, während er sonst einige Zeit ständig bewacht werden muß.

16. *Farbenfilter.* Zur Trennung des Rot erster Ordnung von dem darüberliegenden Violett zweiter Ordnung habe ich farbige Gläser vor den Vorspalt (Fig. 10) geschaltet. Als Rotfilter ein Rubinglas, als Violettfilter Glas F 3873 von Schott und Genossen in Jena. Das Rubinglas ist völlig undurchlässig für das Violett zweiter Ordnung, während das Violettglas noch etwas Rot erster Ordnung durchläßt. Für den vorliegenden Zweck war es aber ganz unschädlich, wenn die stärksten Rotlinien auch im violetten Vergleichsspektrum vertreten sind.

#### § 5. Auswertung der Spektrogramme.

1. *Messung.* Jedes Spektrogramm enthält drei dicht nebeneinanderliegende Spektren: in der Mitte das 1 mm hohe Rotpektrum erster Ordnung, oben und unten das  $\frac{1}{2}$  mm hohe violette Vergleichsspektrum zweiter Ordnung. Man hat also alle Linien des Rotspektrums und alle Standardlinien des Vergleichsspektrums zu messen. Beim Aufsuchen der Standards hat mir der Atlas von Kayser und Runge sehr gute Dienste geleistet. Ich habe die Platten teils mit einem Toepferschen Meßmikroskop der hiesigen Sternwarte, teils mit einem Abbéschen Komparator des hiesigen Instituts für theoretische Physik ausgemessen. Für die lebenswürdige Überlassung der Instrumente sei auch an dieser Stelle den Herren Hartmann und Voigt bestens gedankt. Das Toepfersche Meßmikroskop besitzt eine 5 cm lange Mikrometerschraube, mit der die photo-

graphische Platte unter dem Mikroskop vorbeigeführt wird. Die Ganghöhe der Schraube ist 0,5 mm. Die Trommel wird auf  $\frac{1}{1000}$  Revolutionen, also auf  $0,5 \mu$  abgelesen. Die Schraubenfehler sind bekannt. Bei dem Abbéschen Komparator wird die photographische Platte direkt mit einem in  $\frac{1}{8}$  mm geteilten 10 cm langen Maßstab verglichen, dessen Teilungsfehler ebenfalls bekannt sind. Platte und Maßstab liegen fest auf einem Schlitten, der unter zwei Mikroskopen vorbeigeführt wird. Das eine fixiert einen Punkt der Platte, das andere mißt mittels eines Okularfadenmikrometers die zugehörige Stelle des Maßstabes.

Die Platten wurden so vermessen, daß jede Linie zweimal eingestellt wurde; dann wurden die Plattenenden vertauscht und wieder jede Linie zweimal eingestellt. Dadurch vermeidet man einseitige Fehler in der subjektiven Auffassung der Linien. Weil die Schraube des Toepferschen Meßmikroskops nur 5 cm lang ist, muß man die photographische Platte mehrmals versetzen und jedesmal Anschlußmessungen ausführen, indem man etwa fünf gute Spektrallinien in beiden Lagen mißt. Die Messung mit dem Komparator geht darum wesentlich schneller. Sie bietet auch noch einen anderen Vorteil: beim Komparator kann man durch Schieben des Schlittens ein großes Spektralgebiet rasch durchmustern, während dies beim Toepferschen Instrument durch das nötige Drehen der Schraube sehr lästig wird.

2. *Standardlinien.* Als Standardlinien habe ich die von Hartmann<sup>1)</sup> mitgeteilten Normallinien des Eisenbogenspektrums, bezogen auf das definitive Rowlandsche System *R*, angenommen. Dieses System unterscheidet sich ganz bedeutend sowohl von dem Michelsonsystem *M* als auch von dem von der Internationalen Konferenz für Sonnenforschung angenommenen Konferenzsystem *C*. Es hat nämlich die rote Kadmiumlinie die Wellenlänge

$$\lambda = 6438,4772 \text{ } M$$

$$\lambda = 6469 \text{ } C$$

$$\lambda = 7098 \text{ } R.$$

1) J. Hartmann, Physik. Zeitschr. 10. p. 121. 1909.

Diese drei Systeme sind streng relativ, d. h. alle Wellenlängen des einen Systems unterscheiden sich von denjenigen des anderen Systems nur um einen konstanten Faktor, und zwar ist:

$$(5) \quad \lambda_R = \lambda_C \cdot F_C.$$

Nach Hartmann ist:

$$F_C = 1,0000373.$$

Das *R*-System hat den Vorteil, daß es den direkten Vergleich mit allen früheren Messungen gestattet, auch wenn diese im Kayser'schen System ausgeführt worden sind. Denn das Kayser'sche System weicht im Maximum nur 0,02 Å.-E. vom *R*-System ab, und Hartmann teilt eine Reduktionstabelle für das Kayser'sche System mit.

3. *Dispersionskurve.* Kayser und Runge<sup>1)</sup> haben die Wellenlängen des Eisenspektrums durch lineare Interpolation zwischen vorher bestimmten Standardlinien abgeleitet und diskutieren ausführlich die Zulässigkeit linearer Interpolation. Bei meinem Spektrographen erfüllt aber eine 10 cm lange Platte vom Hohlspiegel aus gesehen einen Winkel von  $6\frac{3}{4}^\circ$ , so daß die Dispersionskurve schon ganz wesentlich von einer Geraden

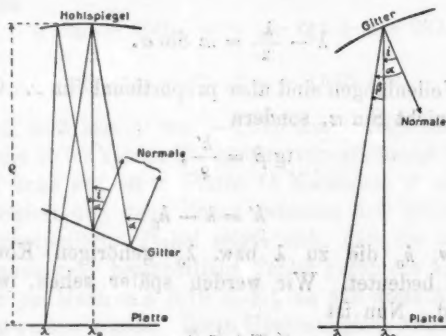


Fig. 11.

abweicht. Fig. 11 zeigt links den Grundriß des Strahlen-  
ganges, wobei zur Vereinfachung die beiden Planspiegel weg-

1) H. Kayser u. C. Runge, l. c.

gelassen sind; vom Hohlspiegel fällt das Licht unter dem Einfallswinkel  $i$  auf das Gitter und geht unter dem Beugungswinkel  $\alpha$  wieder zurück, um an der Stelle  $\lambda$  der Platte vereinigt zu werden.  $\rho$  ist der Krümmungsradius des Hohlspiegels. Rechts zeigt Fig. 11 einen damit äquivalenten Strahlengang, wobei der Hohlspiegel durch ein Konkavgitter repräsentiert ist.

Die allgemeine Gittergleichung lautet:

$$(6) \quad \lambda = m(\sin \alpha + \sin i),$$

worin

$$m = \frac{G}{h} = \frac{\text{Gitterkonstante}}{\text{Ordnungszahl}}$$

ist.  $\lambda_0$  liege in der Plattenmitte; dafür ist:

$$\alpha = i, \quad \text{also}$$

$$(7) \quad \lambda_0 = 2m \sin i$$

oder:

$$m \cdot \sin i = \frac{\lambda_0}{2},$$

sodaß man (6) auch schreiben kann:

$$\lambda = m \cdot \sin \alpha + \frac{\lambda_0}{2}$$

oder

$$(8) \quad \lambda - \frac{\lambda_0}{2} = m \sin \alpha.$$

Die Wellenlängen sind also proportional  $\sin \alpha$ . Gemessen wird aber nicht  $\sin \alpha$ , sondern

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k'}{\rho},$$

worin

$$k' = k - k_0$$

und  $k$  bzw.  $k_0$  die zu  $\lambda$  bzw.  $\lambda_0$  gehörigen Komparatorablesungen bedeutet. Wir werden später sehen, wie  $k_0$  gefunden wird. Nun ist

$$\alpha = i + \beta,$$

also

$$\sin \alpha = \sin(i + \beta)$$

$$= \sin i \cos \beta + \cos i \sin \beta.$$

Ferner ist

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}},$$



sodaß

$$\sin \alpha = \frac{\sin i}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} + \frac{\cos i \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}},$$

oder

$$(9) \quad \sin \alpha = (\sin i + \cos i \operatorname{tg} \beta) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{-1/2}.$$

Durch Reihenentwicklung findet man

$$(10) \quad \frac{\varrho}{\cos i} \cdot \sin \alpha = k' + \varrho \cdot \operatorname{tg} i + (\varrho \cdot \operatorname{tg} i + k') \cdot F,$$

worin

$$F = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^4 \beta$$

ist.

In Gleichung (10) ist für eine gegebene Gitterstellung  $\varrho/\cos i$  und  $\varrho \cdot \operatorname{tg} i$  konstant, sodaß also

$$(\varrho \cdot \operatorname{tg} i + k') \cdot F$$

zeigt, um wieviel man  $k'$  korrigieren muß, um linear interpolieren zu dürfen.

Ist z. B.

$$i = 13^\circ 16', \quad \varrho = 850 \text{ mm}, \quad k' = + 61,245 \text{ mm},$$

so ist

$$\operatorname{tg} \beta = 0,0720 \quad \text{und} \quad F = - 0,00259.$$

Ferner ist

$$\varrho \cdot \operatorname{tg} i = 200, \quad \text{also} \quad \varrho \cdot \operatorname{tg} i + k' = 261,$$

sodaß

$$(\varrho \cdot \operatorname{tg} i + k') \cdot F = - 0,675 \text{ mm}$$

ist. Man muß also  $k'$  um  $-0,675$  mm korrigieren, eine Korrektur, die unter keinen Umständen vernachlässigt werden darf.

Ich habe auf einer Platte 15 Normalen gemessen, nach (10) korrigiert und dann linear zwischen den beiden äußersten Linien interpoliert. Dabei zeigte sich, daß die interpolierten Linien noch sehr beträchtliche Fehler gegen die wahren Werte behalten (im Maximum  $0,19 \text{ \AA.-E.}$ ), so daß diese Art der Rechnung verworfen wurde. Diese Unstimmigkeit zwischen Theorie und Beobachtung erklärt sich wohl ebenso wie die beobachtete Form der Fokalkurve durch die Wirkung der Ränder von Gitter und Hohlspiegel, die oben nicht berücksichtigt werden konnte.

Ich habe es darum vorgezogen, rein empirisch die Dispersionskurve für jede der sechs verwendeten um je  $1^\circ$  ver-

schiedenen Gitterstellungen aus den Vergleichsspektren der Platten selbst abzuleiten. Dazu interpoliert man zunächst nur für die mittelste Gitterstellung linear zwischen zwei weit auseinander liegenden Standards und bildet die Unterschiede zwischen den wahren und den berechneten Standards. Diese Unterschiede wachsen in der Mitte bis auf etwa 2 Å-E. Man rechnet sie zweckmäßig auf Längeneinheiten des Komparators um und zeichnet diese Differenzfunktion auf; dann sieht man auf der Kurve kleine Anomalien, die wohl durch Fehler in den verschiedenen Spiegeln verursacht sind.

4. *Referenzfunktion.* Prinzipiell wäre es richtig, wenn man aus dieser Differenzkurve die Korrektur für jede Komparatorablesung  $k$  entnehmen würde, jedoch ist dies ziemlich ungenau. Ich habe deshalb eine analytische Referenzfunktion  $R$  eingeführt, die sich der beobachteten Differenzfunktion möglichst gut anschmiegt. Dazu eignen sich die sogenannten Polytropen ganz besonders, weshalb ich

$$R = -A \cdot k^\alpha$$

gesetzt habe. Darin sind  $A$  und  $\alpha$  Konstanten und  $k' = k - k_0$  hat die Bedeutung von p. 778. Weil die Differenzkurve unsymmetrisch ist, habe ich für jede Hälfte ein Konstantenpaar  $A, \alpha$  bestimmt und damit  $R$  tabuliert. Die Referenzfunktion hat demnach in der Mitte den Wert 0 und wächst nach beiden Seiten zu immer größeren negativen Werten. Bevor man an den Standardmessungen einer Platte die Korrektur  $R$  anbringen kann, muß man  $k_0$  kennen, d. h. man muß wissen, an welcher Plattenstelle  $\lambda_0$  dieser Gitterstellung liegt. Nach (7) ist aber

$$(7) \quad \lambda_0 = 2m \cdot \sin i.$$

Der Einfallswinkel  $i$  kann direkt gemessen werden und

$$m = \frac{\text{Gitterkonstante}}{\text{Ordnungszahl}}$$

ist bekannt. Wenn man also  $\lambda_0$  nach (7) berechnet hat, ermittelt man das zugehörige  $k_0$  durch lineare Interpolation zwischen den beiden zunächst liegenden Standards. Dann kann man für alle Spektrallinien  $k' = k - k_0$  bilden, aus der Tabelle für  $R$  den zugehörigen Wert  $R$  entnehmen und an den Komparatorablesungen  $k$  als Korrektur anbringen.

5. *Restfunktion.* Nachdem so  $R$  aller Spektrallinien bestimmt worden ist, wählt man irgend zwei den Plattenenden benachbarte möglichst sicher gemessene Standards als Basis und berechnet durch lineare Interpolation die angenäherte Wellenlänge  $[\lambda]_{\text{Stand.}}$  aller Standards. Dann bildet man die Reste  $\lambda_{\text{Stand.}} - [\lambda]_{\text{Stand.}}$ , rechnet sie auf Längeneinheiten des Komparators um und zeichnet sie auf. Diese Restfunktion verläuft angenähert geradlinig, ihre größte Abweichung beträgt nur etwa  $10 \mu$ . Die graphisch ausgeglichene Restfunktion bringt man jetzt gleichzeitig mit  $R$  als Korrektur an jedem Standard und jeder Rotlinie an und interpoliert linear über der Basis die Wellenlängen  $[\lambda]$ . Meist wird diese Ausgleichung schon genügen; wenn es sich aber um größte Genauigkeit handelt, bildet man für alle Standards die Fehler  $\lambda_{\text{Stand.}} - [\lambda]_{\text{Stand.}}$  in  $\text{\AA} \cdot 10^{-3}$  und gleicht diese graphisch aus. Die so ermittelte Fehlerverbesserung bringt man dann an allen Rotlinien an. Schließlich multipliziert man die Wellenlängen mit 2, weil die Standards in zweiter, die Rotlinien in erster Ordnung liegen.

Es sei noch bemerkt, daß ein und dieselbe Referenzfunktion  $R$  für mehrere benachbarte Gitterstellungen genügt, dagegen ist die Restfunktion für jede Gitterstellung, die Fehlerverbesserungsfunktion für jede Platte zu berechnen.

#### § 6. Das rote und ultrarote Eisenbogenspektrum.

Ich habe mit dem oben beschriebenen Spektrographen das Eisenbogenspektrum auf Dicyaninplatten von 6750 bis 9809  $\text{\AA}$ -E. in erster Ordnung photographiert und in diesem Gebiete 216 meist neue Linien gefunden. Zur Bestimmung der Wellenlängen habe ich vor und nach jeder Rotaufnahme das violette Eisenbogenspektrum zweiter Ordnung daneben photographiert und in der im vorigen Paragraphen auseinander gesetzten Weise zwischen den violetten Standardlinien interpoliert. Ich habe Aufnahmen bei sechs um je  $1^\circ$  voneinander verschiedenen Gitterstellungen gemacht; dadurch erhält man jede Linie auf fünf über die Plattenlänge gleichmäßig verteilte Stellen, so daß beim Gesamtmittel einseitig wirkende Fehler verschwinden. Die Intensität wurde geschätzt, und zwar bedeutet 1 die schwächste, 10 die stärkste Intensität.  $d$  bedeutet, daß die Linie diffus ist. Bei der Mittelbildung wurde

den Einzelwerten verschiedenes Gewicht beigelegt, und zwar wurde die Platte in fünf gleiche Abschnitte geteilt, der mittelste erhielt das Gewicht 5; die benachbarten das Gewicht 3, die äußersten das Gewicht 1. Unter Berücksichtigung dieser Gewichte wurde dann der mittlere Fehler des Mittels berechnet.

Der Lichtbogen brannte mit ca. 11 Amp. zwischen schmiedeeisernen Stäben. Die Spaltweite betrug ca. 0,02 mm, die Exposition der Rotspektren 3 Minuten bis 8 Stunden, diejenige der Vergleichsspektren 3—10 Minuten. Entwickelt wurde 3 Minuten mit Rodinal 1:15. Die folgende Tabelle enthält die gefundenen Linien und zum Vergleich ältere Messungen, soweit sie mir zugänglich geworden sind.

Emissionslinien des Eisenbogens im Rot und Ultrarot.

Charakter	$\lambda$ in Å.-E.	Mittlerer Fehler in Å.-E. $10^{-2}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
1	6703,86	?	1		6703,874	
2	6705,44	?	1		6705,428	
1	6713,75	2	2		6713,426	
1	6716,22	?	1		6716,532	
1	6718,05	?	1		6717,864	
3 d	6726,85	12	2		6726,924	6726,95
2	6733,52	?	1		6733,472	
1	6735,59	?	1			
2 d	6736,97	?	1			
4	6750,58	2	2		6750,449	6750,43
3	6753,20	2	2		6753,039	6752,98
1 d	6787,40	?	1		6787,193	
1	6796,59	?	1		6796,340	
1	6799,08	?	1			
1	6802,63	?	1			
2	6804,51	?	1		6804,429	
1	6807,31	?	1		6807,117	
3	6810,64	16	2	6811,34	6810,542	6810,55
2 d	6820,99	4	2	6823,50	6820,742	
4	6829,09	6	2	6831,84	6828,906	6828,87
2	6839,35	?	1		6839,178	
5	6841,79	4	2	6844,31	6841,662	6841,60

Charakter	$\lambda$ in Å.-E.	Mittlerer Fehler in Å.-E. $10^{-2}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
5	6844,05	1	2	6846,17	6843,997	6843,95
6	6855,64	8	2	6857,81	6855,500	6855,45
4	6858,62	10	2		6858,500	
2	6862,85	?	1			
1	6864,97	?	1			
2 d	6881,95	?	1	6883,65		
2	6886,25	11	2	6889,01	6886,089	
1	6898,92	?	1			
3	6903,25	?	1		6903,146	
5	6917,10	10	2	6919,46	6917,042	
1 d	6933,85	?	1		6933,941	
6	6945,50	10	2	6947,87	6945,490	6945,48
1	6947,95	11	2		6947,723	
4	6951,54	8	2		6951,536	
1 d	6971,99	?	1			
2	6976,33	17	3			
1	6977,41	0,4	2		6977,726	
5	6979,18	5	4	6980,76	6979,147	6979,15
2 d	6986,55	8	2		6988,775	
4 d	7000,32	5	4	7002,14	7000,210	
1	7004,81	?	1			
1	7008,18	5	3			
1	7011,74	13	3			
7	7016,82	5	4	7018,14		
1	7020,86	?	1			
6 d	7023,40	2	4	7025,64	7023,313	
3	7024,73	3	2		7024,426	
1	7027,97	?	1			
2 d	7030,69	11	3			
5	7038,72	6	4	7040,36	7038,584	
2 d	7044,49	2	2	7047,14		
5	7068,68	3	3	7069,88	7068,742	
1 d	7072,48	2	2			
1 d	7083,62	11	3			
1 d	7087,23	5	3			
5	7090,83	3	4	7092,41	7090,952	
1	7093,32	?	1			
1	7095,65	6	4			
2	7107,78	5	3			

Charakter	$\lambda$ in $\text{\AA}$ -E.	Mittlerer Fehler in $\text{\AA}$ -E. $10^{-3}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
1	7112,45	8	3			
6	7131,24	8	4	7132,40	7131,266	
1	7133,29	6	4		7133,343	
2 d	7142,89	11	3			
2	7145,62	6	3			
1 d	7148,87	?	1			
1 d	7151,79	?	1			
1 d	7156,81	37	4			
1	7158,92	?	1			
8	7164,95	9	4	7165,82	7164,804	
2 d	7176,66	6	4	7177,34		
3 d	7181,79	4	3	7183,35	7181,649	
10	7187,77	6	3	7188,62	7187,665	7187,70
1 d	7192,37	18	2			
1	7195,40	?	1			
9	7207,78	5	4	7208,54	7207,705	
1	7212,80	?	1			
2	7219,37	6	4			
1 d	7221,43	?	1			
2	7224,04	7	4			
1	7228,93	?	1	7229,99		
3	7240,30	6	4	7241,33	7240,453	
2 d	7244,99	11	3	7246,29		
2 d	7255,29	17	3			
3 d	7261,74	11	3			
1 d	7278,95	?	1			
1 d	7282,85	12	2	7284,88		
2	7285,20	8	4			
3	7289,21	7	3		7289,328	
4	7293,41	6	4	7294,34	7293,397	
1	7295,33	?	1			
1 d	7300,70	3	2			
2	7307,05	9	2	7309,37		
2 d	7308,09	9	4			
3 d	7311,48	9	4	7313,78	7311,676	
2 d	7321,02	6	4			
1 d	7326,71	22	2			
1 d	7330,30	?	1			
2 d	7333,94	9	2			

Charakter	$\lambda$ in Å.-E.	Mittlerer Fehler in Å.-E. $10^{-2}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
2 d	7351,93	6	3			
1	7353,75	?	1			
1 d	7362,48	4	2			
1	7366,58	?	1			
1	7370,40	?	1			
2	7376,86	8	4			
1 d	7383,40	22	2			
3 d	7386,85	10	4			
7	7387,95	?	1			
6	7389,91	5	3		7389,650	
1 d	7401,97	8	4			
6	7411,58	6	4	7413,83	7411,371	
2	7418,91	3	4		7418,740	
1 d	7422,65	59	2			
1 d	7431,01	3	2			
1 d	7441,57	?	1			
1 d	7443,10	9	3			
7	7446,13	6	4	7448,91	7446,047	
1 d	7462,37	12	2			
1	7468,64	3	3			
1 d	7476,64	?	1			
1 d	7482,29	?	1			
2	7492,07	5	5			
9	7495,42	9	5	7497,45	7495,405	
1 d	7507,71	6	4			
10	7511,38	8	5	7512,90	7511,329	
4	7531,50	4	5	7532,85	7531,465	
2 d	7546,98	5	4			
1	7548,08	?	1			
1 d	7555,20	4	3			
1 d	7559,61	9	2			
1 d	7569,50	?	1			
3	7569,27	4	6	7570,74		
1 d	7573,32	4	4			
3	7584,09	3	5		7584,151	
6	7586,52	3	6	7587,45	7586,362	
1 d	7601,12	?	1			
1 d	7604,64	?	1			
3 d	7620,97	7	6	7621,94		



Charakter	$\lambda$ in Å.-E.	Mittlerer Fehler in Å.-E. $10^{-3}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
3	7635,77	?	1			
1	7654,17	6	3			
2	7661,67	2	6			
4	7664,59	1	5			
2	7710,80	7	4	7711,76		
1	7723,50	4	2			
1d	7733,16	?	1			
1d	7742,83	?	1			
5	7748,50	5	4	7750,22		
1d	7751,49	19	2			
7	7772,25	5	5			
6	7772,74	?	1			
6	7774,56	5	4			
6	7775,66	6	5			
8	7781,00	2	4	7783,72		
1d	7808,56	?	1			
8	7832,80	3	5	7832,56		
1d	7856,06	?	1			
1d	7912,84	?	1			
8	7937,62	3	5	7937,30		
1d	7941,62	9	2			
7	7946,30	1	5	7946,18		
2	7951,33	?	1			
1	7952,46	?	1			
1	7956,34	?	1			
1	7994,70	10	3			
7	7999,39	5	5	7998,82		
1d	8003,68	?	1			
1d	8024,78	?	1			
2	8023,70	5	3			
7	8046,47	2	4	8046,64		
1d	8067,50	?	1			
1d	8080,88	?	1			
3d	8083,67	?	1			
5	8085,60	3	3	8086,60		
1d	8097,22	33	2			
1d	8185,93	?	1			
3	8199,37	4	4			
2d	8208,26	4	4			

Charakter	$\lambda$ in Å.-E.	Mittlerer Fehler in Å.-E. $10^{-1}$ $\pm$	Anzahl der Photo- graphien	H. Leh- mann	Kochen	Exner u. Haschek
1	8216,71	4	2			
7	8220,83	3	5	8221,16		
1	8230,39	?	1			
1 d	8232,76	8	5			
2 d	8248,78	6	2			
2	8264,52	?	1			
7	8327,39	2	5			
4	8332,40	3	5	8336,28		
2	8339,86	1	4			
1 d	8361,07	14	2			
1	8365,86	2	2			
7	8388,04	2	3	8389,38		
2	8406,19	?	1			
2 d	8440,10	3	2			
7	8446,84	5	4			
3	8468,75	5	3			
1	8472,39	?	1			
1 d	8497,71	?	1			
3 d	8514,46	8	2			
1	8515,36	10	2			
1	8527,09	3	2			
1	8582,67	?	1			
2	8610,20	?	1			
2	8612,15	14	2			
5	8662,18	2	5	8661,46		
2 d	8675,08	5	3			
6	8688,94	3	5	8690,98		
1 d	8757,38	5	2			
1 d	8764,39	5	2			
2	8793,87	4	3			
4	8824,56	0,5	2			
4	8842,53	?	1			
2 d	8867,40	6	3			
2	8999,84	10	3			
1	9616,59	?	1			
3	9647,48	?	1			
1 d	9711,82	?	1			
1 d	9809,23	?	1			

**Zusammenfassung.**

1. Es wurde ein lichtstarker, glasfreier, stigmatischer Gitterspektrograph konstruiert.
2. Es wurde eine Methode gefunden, haltbare ultrarotempfindliche Platten herzustellen.
3. Damit wurden 216 Linien des Eisenbogenspektrums von 6750—9809 Å.-E. photographiert.
4. Es wurde eine exakte Methode zur Ableitung der Wellenlängen entwickelt.
5. Danach wurde die Wellenlänge dieser 216 Eisenbogenlinien berechnet.
6. Der mittlere Fehler beträgt dabei meist nur einige Hundertstel Å.-E.

Die Arbeit habe ich im Institut für Geophysik ausgeführt, dessen Direktor Hrn. Professor Wiechert, sowie den Herren Geheimrat Voigt und Professor Hartmann sei auch an dieser Stelle für die Überlassung und Beschaffung der nötigen Hilfsmittel bestens gedankt.

Göttingen, den 17. Juli 1912.

(Eingegangen 23. Juli 1912.)

6750	2	2	6750	1
6751	2	2	6751	1
6752	2	2	6752	1
6753	2	2	6753	1
6754	2	2	6754	1
6755	2	2	6755	1
6756	2	2	6756	1
6757	2	2	6757	1
6758	2	2	6758	1
6759	2	2	6759	1
6760	2	2	6760	1
6761	2	2	6761	1
6762	2	2	6762	1
6763	2	2	6763	1
6764	2	2	6764	1
6765	2	2	6765	1
6766	2	2	6766	1
6767	2	2	6767	1
6768	2	2	6768	1
6769	2	2	6769	1
6770	2	2	6770	1
6771	2	2	6771	1
6772	2	2	6772	1
6773	2	2	6773	1
6774	2	2	6774	1
6775	2	2	6775	1
6776	2	2	6776	1
6777	2	2	6777	1
6778	2	2	6778	1
6779	2	2	6779	1
6780	2	2	6780	1
6781	2	2	6781	1
6782	2	2	6782	1
6783	2	2	6783	1
6784	2	2	6784	1
6785	2	2	6785	1
6786	2	2	6786	1
6787	2	2	6787	1
6788	2	2	6788	1
6789	2	2	6789	1
6790	2	2	6790	1
6791	2	2	6791	1
6792	2	2	6792	1
6793	2	2	6793	1
6794	2	2	6794	1
6795	2	2	6795	1
6796	2	2	6796	1
6797	2	2	6797	1
6798	2	2	6798	1
6799	2	2	6799	1
6800	2	2	6800	1
6801	2	2	6801	1
6802	2	2	6802	1
6803	2	2	6803	1
6804	2	2	6804	1
6805	2	2	6805	1
6806	2	2	6806	1
6807	2	2	6807	1
6808	2	2	6808	1
6809	2	2	6809	1
6810	2	2	6810	1
6811	2	2	6811	1
6812	2	2	6812	1
6813	2	2	6813	1
6814	2	2	6814	1
6815	2	2	6815	1
6816	2	2	6816	1
6817	2	2	6817	1
6818	2	2	6818	1
6819	2	2	6819	1
6820	2	2	6820	1
6821	2	2	6821	1
6822	2	2	6822	1
6823	2	2	6823	1
6824	2	2	6824	1
6825	2	2	6825	1
6826	2	2	6826	1
6827	2	2	6827	1
6828	2	2	6828	1
6829	2	2	6829	1
6830	2	2	6830	1
6831	2	2	6831	1
6832	2	2	6832	1
6833	2	2	6833	1
6834	2	2	6834	1
6835	2	2	6835	1
6836	2	2	6836	1
6837	2	2	6837	1
6838	2	2	6838	1
6839	2	2	6839	1
6840	2	2	6840	1
6841	2	2	6841	1
6842	2	2	6842	1
6843	2	2	6843	1
6844	2	2	6844	1
6845	2	2	6845	1
6846	2	2	6846	1
6847	2	2	6847	1
6848	2	2	6848	1
6849	2	2	6849	1
6850	2	2	6850	1
6851	2	2	6851	1
6852	2	2	6852	1
6853	2	2	6853	1
6854	2	2	6854	1
6855	2	2	6855	1
6856	2	2	6856	1
6857	2	2	6857	1
6858	2	2	6858	1
6859	2	2	6859	1
6860	2	2	6860	1
6861	2	2	6861	1
6862	2	2	6862	1
6863	2	2	6863	1
6864	2	2	6864	1
6865	2	2	6865	1
6866	2	2	6866	1
6867	2	2	6867	1
6868	2	2	6868	1
6869	2	2	6869	1
6870	2	2	6870	1
6871	2	2	6871	1
6872	2	2	6872	1
6873	2	2	6873	1
6874	2	2	6874	1
6875	2	2	6875	1
6876	2	2	6876	1
6877	2	2	6877	1
6878	2	2	6878	1
6879	2	2	6879	1
6880	2	2	6880	1
6881	2	2	6881	1
6882	2	2	6882	1
6883	2	2	6883	1
6884	2	2	6884	1
6885	2	2	6885	1
6886	2	2	6886	1
6887	2	2	6887	1
6888	2	2	6888	1
6889	2	2	6889	1
6890	2	2	6890	1
6891	2	2	6891	1
6892	2	2	6892	1
6893	2	2	6893	1
6894	2	2	6894	1
6895	2	2	6895	1
6896	2	2	6896	1
6897	2	2	6897	1
6898	2	2	6898	1
6899	2	2	6899	1
6900	2	2	6900	1
6901	2	2	6901	1
6902	2	2	6902	1
6903	2	2	6903	1
6904	2	2	6904	1
6905	2	2	6905	1
6906	2	2	6906	1
6907	2	2	6907	1
6908	2	2	6908	1
6909	2	2	6909	1
6910	2	2	6910	1
6911	2	2	6911	1
6912	2	2	6912	1
6913	2	2	6913	1
6914	2	2	6914	1
6915	2	2	6915	1
6916	2	2	6916	1
6917	2	2	6917	1
6918	2	2	6918	1
6919	2	2	6919	1
6920	2	2	6920	1
6921	2	2	6921	1
6922	2	2	6922	1
6923	2	2	6923	1
6924	2	2	6924	1
6925	2	2	6925	1
6926	2	2	6926	1
6927	2	2	6927	1
6928	2	2	6928	1
6929	2	2	6929	1
6930	2	2	6930	1
6931	2	2	6931	1
6932	2	2	6932	1
6933	2	2	6933	1
6934	2	2	6934	1
6935	2	2	6935	1
6936	2	2	6936	1
6937	2	2	6937	1
6938	2	2	6938	1
6939	2	2	6939	1
6940	2	2	6940	1
6941	2	2	6941	1
6942	2	2	6942	1
6943	2	2	6943	1
6944	2	2	6944	1
6945	2	2	6945	1
6946	2	2	6946	1
6947	2	2	6947	1
6948	2	2	6948	1
6949	2	2	6949	1
6950	2	2	6950	1
6951	2	2	6951	1
6952	2	2	6952	1
6953	2	2	6953	1
6954	2	2	6954	1
6955	2	2	6955	1
6956	2	2	6956	1
6957	2	2	6957	1
6958	2	2	6958	1
6959	2	2	6959	1
6960	2	2	6960	1
6961	2	2	6961	1
6962	2	2	6962	1
6963	2	2	6963	1
6964	2	2	6964	1
6965	2	2	6965	1
6966	2	2	6966	1
6967	2	2	6967	1
6968	2	2	6968	1
6969	2	2	6969	1
6970	2	2	6970	1
6971	2	2	6971	1
6972	2	2	6972	1
6973	2	2	6973	1
6974	2	2	6974	1
6975	2	2	6975	1
6976	2	2	6976	1
6977	2	2	6977	1
6978	2	2	6978	1
6979	2	2	6979	1
6980	2	2	6980	1
6981	2	2	6981	1
6982	2	2	6982	1
6983	2	2	6983	1
6984	2	2	6984	1
6985	2	2	6985	1
6986	2	2	6986	1
6987	2	2	6987	1
6988	2	2	6988	1
6989	2	2	6989	1
6990	2	2	6990	1
6991	2	2	6991	1
6992	2	2	6992	1
6993	2	2	6993	1
6994	2	2	6994	1
6995	2	2	6995	1
6996	2	2	6996	1
6997	2	2	6997	1
6998	2	2	6998	1
6999	2	2	6999	1
7000	2	2	7000	1

### 3. Zur Theorie der spezifischen Wärmen; von P. Debye.

Die Beobachtungen, welche im Laufe der letzten Zeit im Nernstschen Laboratorium über die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen ausgeführt wurden, haben in überzeugendster Weise auch für materielle Körper die Unrichtigkeit des Satzes von der gleichmäßigen Energieverteilung dargetan. Bekanntlich hat Einstein<sup>1)</sup> zuerst auf die zu erwartenden Verhältnisse aufmerksam gemacht und unter Benutzung der von Planck<sup>2)</sup> für die Bedürfnisse der Strahlungstheorie entwickelten Quantenformel die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur durch eine Formel dargestellt. Nun zeigen alle Messungen zwar einen Verlauf, welcher qualitativ der Einsteinschen Formel entspricht, quantitativ aber treten Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung zutage, welche um so erheblicher werden, je tiefer die Temperatur wird. Um diesen Übelstand abzuheben, haben Nernst und Lindemann die Einsteinsche Formel dahin abgeändert, daß sie neben der vorhandenen Schwingungszahl  $\nu$  noch eine zweite Schwingungszahl  $\nu/2$  in bekannter Weise einführen.<sup>3)</sup> Die Einführung dieser zweiten Schwingungszahl entspricht zwar durchaus dem praktischen Bedürfnis nach einer besseren Formel als die Einsteinsche, es ist indessen bis jetzt nicht gelungen, irgend einen stichhaltigen Grund für gerade diesen Wert  $\nu/2$  ausfindig zu machen. Wir werden im folgenden sehen, daß ein tieferer Grund dafür auch nicht existiert. Wenn nun auch der Wert  $\nu/2$  selbst keine weitere theoretische Begründung hat, so läßt sich doch andererseits die Notwendigkeit der Einführung mehrerer Schwingungszahlen plausibel machen, wie

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 22. p. 180. 1907.

2) M. Planck, Wärmestrahlung p. 157. Leipzig 1906.

3) W. Nernst u. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochemie p. 817 1911; Berl. Ber. p. 26. 1910.

das schon Einstein<sup>1)</sup> gezeigt hat. Die einem schwingenden Atom benachbarten üben nämlich so starke Wirkungen auf dasselbe aus, daß seine Bewegung nur eine sehr entfernte Ähnlichkeit mit einer rein periodischen Bewegung haben kann. Damit ist dann natürlich auch die unmittelbare Anwendung der Planckschen Formel (mit *einer* Schwingungszahl) in Frage gestellt. Denkt man sich die Bewegung des Atoms nach Fourier zerlegt, so könnte man auf diesem Wege die Bewegung durch sehr viele verschiedene Schwingungszahlen charakterisieren und so mit Einstein eben die Einführung derselben plausibel machen.

So richtig diese Bemerkung an sich ist, die wirkliche Ausführung einer solchen Rechnung ist sehr umständlich; viel direkter führt der folgende Weg zu einer rationellen Formel für die spezifische Wärme. Derselbe steht in direkter Analogie zu dem Jeansschen Beweise für die Rayleighsche Strahlungsformel.

Denken wir uns einen Körper, bestehend aus  $N$  Atomen, die wir als Massenpunkte behandeln können, so repräsentiert derselbe ein System von  $3N$  Freiheitsgraden.<sup>2)</sup> Dementsprechend wird er im allgemeinen  $3N$  verschiedene periodische Bewegungen mit  $3N$  verschiedenen Schwingungszahlen ausführen können. Die langsamsten dieser Schwingungen sind die ohne weiteres beobachtbaren Schallschwingungen. Die allgemeinste Bewegung, welche der Körper ausführen kann, läßt sich als Superposition der obigen  $3N$  Bewegungsformen auffassen und durch dieselben unter Einführung von  $6N$  Konstanten additiv darstellen.<sup>3)</sup> Auch für die Wärmebewegung, als spezieller Fall jener allgemeinen Bewegung, muß diese Bemerkung noch richtig bleiben.

Würde der Satz von der gleichmäßigen Energieverteilung richtig sein, so brauchten wir das „Spektrum“ des Körpers nicht zu bestimmen. Wir würden dann von vornherein jeder

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 35. p. 679. 1911.

2) Bei dieser Definition ist also ein linearer Oszillator ein System mit einem Freiheitsgrad.

3) Die Anzahl Konstanten ist  $6N$ , weil zur vollständigen Bestimmung einer Eigenschwingung zwei Angaben gehören: Amplitude und Phase zu irgend einer Anfangszeit.

Eigenschwingung die Energie  $h\nu$  ( $h = 1,47 \cdot 10^{-16}$  erg,  $T$  = absolute Temperatur) zuzuschreiben haben und damit die Gesamtenergie des Körpers zu  $3NkT$  finden, wie das bekanntlich dem Dulong-Petitschen Gesetz entspricht. Statt dessen lehrt aber die Plancksche Strahlungsformel, daß die mittlere Energie bei der Temperatur  $T$  für ein Gebilde mit der Schwingungszahl  $\nu$  den Wert hat:

$$\frac{h\nu}{e^{kT} - 1}$$

$$\left( \begin{array}{l} h = \text{Wirkungsquantum} = 7,10 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}^1 \\ k = \text{Boltzmannsche Konstante} = 1,47 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \end{array} \right).$$

Wir müssen also zunächst die Eigenschwingungen des Körpers ihrer Schwingungszahl nach bestimmen, jede dieser Eigenschwingungen die eben angegebene Energie zuerkennen und dann die erhaltenen Ausdrücke über das ganze Spektrum summieren. Dann kennen wir die Energie des Körpers bei der Temperatur  $T$  und durch Differentiation auch seine spezifische Wärme  $C$ .

Das erste, was wir zu tun haben, ist also die Bestimmung des „akustischen Spektrums“ für einen Körper von beliebiger Form, denn es kommt, wie wir wissen, auf diese Form bei der Berechnung von  $U$  gar nicht weiter an. Nun könnten wir zu diesem Zwecke den Körper als Punktgitter ansehen, bestehend aus  $N$  Massenpunkten und aus dem zugehörigen System von  $3N$  Bewegungsgleichungen die  $3N$  Schwingungszahlen des Systems bestimmen. Dabei können wir dann nicht umhin, spezielle einfache Hypothesen über die Wirkung der Atome aufeinander zu machen. Es ist keine Frage, daß dieser Weg, sofern unsere Hypothesen über die Kräfte richtig sind, vollständig exakt wäre. Aber es ist nicht gesagt, daß zur Berechnung der spezifischen Wärme eine völlig exakte Kenntnis des Spektrums nötig ist, man kann im Gegenteil von vornherein erwarten, schon eine praktisch genügend genaue Formel zu erhalten, falls man nur die charakteristischen Eigenschaften jenes Spektrums gebührend berücksichtigt.

1) Die Zahlenwerte sind die neuerdings von Paschen-Gerlach angegebene: Ann. d. Phys. 38. p. 41. 1912.

Daß dieses nun möglich ist, ohne daß wir auf die gegenseitigen Kräfte der Atome näher eingehen, möchten wir im folgenden zeigen.

Wir gehen aus von den gewöhnlichen elastischen Gleichungen. Bei der Ableitung derselben wird der Körper als Kontinuum behandelt; dem entspricht es, daß wir durch Benutzung derselben dazu geführt werden, einem elastischen Körper unendlich viele Eigenschwingungen zuzuschreiben. Letzteres ist nun unbedingt falsch, der Körper besteht aus  $N$  Atomen, kann also auch nur  $3N$  verschiedene Eigenschwingungen besitzen. Indessen nach einer anderen Richtung wird die Rechnung auf Grund der elastischen Gleichungen doch für uns von Interesse sein. Sie wird uns nämlich ein Gesetz ergeben für die Dichte der Spektrallinien des akustischen Spektrums pro Schwingungszahlenbereich  $d\nu$  gemessen. Im folgenden werden wir nun so verfahren, daß wir das Gesetz für die Dichte der Spektrallinien als vollständig genau richtig ansehen. Die diskontinuierliche Struktur des Körpers werden wir nur insofern berücksichtigen, als wir aus dem Vorhandensein derselben schließen: unser Spektrum besteht im ganzen nur aus  $3N$  und nicht aus unendlich vielen Spektrallinien. Demgemäß brechen wir das aus den elastischen Gleichungen berechnete Spektrum bei der  $3N^{\text{ten}}$  Spektrallinie ab. Mit Sicherheit können wir behaupten, daß das Spektrum des wirklichen Körpers für kleine Schwingungszahlen mit dem berechneten Spektrum vollständig übereinstimmen wird. Für die hohen Schwingungszahlen, bei denen die Wellenlänge vergleichbar wird mit dem Abstand zweier Atome, ist die so berechnete Linienverteilung ebenso sicher nur angenähert richtig. Dennoch wollen wir diesen Fehler zulassen, die Erfahrung gibt uns recht und zeigt, daß er wohl nicht wesentlich ins Gewicht fällt. Denn wie wir im folgenden zeigen wollen, ergibt diese angenäherte Rechnung eine Formel für die spezifische Wärme, welche in jeder Hinsicht den Erfahrungstatistiken vollständig gerecht wird.<sup>1)</sup>

1) Ein Fall, der sich leicht streng behandeln läßt, ist der eines linearen Körpers atomistischer Struktur (vgl. z. B. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, London 1877. Vol. 1. p. 129). Nach Analogie mit diesem Falle



An Stelle der einfachen Schwingungszahl von Einstein tritt also ein ganzes Spektrum auf, daß wir im Sinne der obigen Auseinandersetzung charakterisieren werden durch zwei Angaben. a) durch seine Grenze, b) durch die Dichte der Linien in der Skala der Schwingungszahlen gemessen. Bei unseren Voraussetzungen tritt in diesen beiden Angaben als einzige wesentliche Konstante die Grenzschwingungszahl  $\nu_m$  auf. Aus dieser Bemerkung folgt sofort der folgende Satz (vgl. § 1):

*Rechnet man die Temperatur  $T$  als Vielfaches einer für die betreffende Substanz charakteristischen Temperatur  $\Theta$ , so ist die spezifische Wärme für alle (eiatomigen) Körper durch dieselbe Kurve dargestellt, m. a. W. die spezifische Wärme eiatomiger Körper ist eine universelle Funktion des Verhältnisses  $T/\Theta$ .*

Einen zweiten Satz, der nicht auf den Fall eiatomiger Körper beschränkt ist, sondern eine ganz allgemeine Gültigkeit beansprucht, erhält man, wenn man die Dichte der Linienverteilung berücksichtigt. Man findet (vgl. § 10), daß auf das Schwingungszahlenintervall  $d\nu$  eine Anzahl Linien entfällt, welche  $\nu^2 d\nu$  proportional ist, d. h. dasselbe Gesetz, welches nach Jeans auch für die Hohlraumstrahlung gilt. Aus dieser Angabe folgt der Satz:

*Bei genügend niedrigen Temperaturen ist die spezifische Wärme aller Körper der dritten Potenz der absoluten Temperatur proportional.<sup>1)</sup>*

kann man schließen, daß die Linien am Ende des Spektrums dichter liegen, als sich nach unserer angenäherten Rechnung ergeben wird.

Da manchmal betont wird, daß ein fundamentaler Unterschied zwischen den optischen Spektren und den sonst bekannten darin zu erblicken sei, daß erstere eine Grenze im endlichen besitzen, will ich die (eigentlich selbstverständliche) Bemerkung nicht unterdrücken, daß in Wahrheit, außer dem Spektrum der Hohlraumstrahlung *kein einziges* existiert, daß nicht eine Grenze im endlichen hätte. Allerdings ist diese Grenze in keinem Falle eine Häufungsstelle im mathematischen Sinne, wie man diese nach den Serienformeln zu erwarten hätte. Eine Häufung der Linien tritt aber in der Nähe dieser Grenze, soweit ich sehen kann, immer ein. Da es nun ohne weiteres gelingt, Anordnungen von Elektronen anzugeben, deren Spektrum dem Deslandresschen Gesetz der Bandenspektren genügt, so ist vielleicht zu erwarten, daß man auch die Serienspektren wird verstehen können, als Eigenschwingungen von Elektronensystemen einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden.

1) Die beiden Sätze, welche ich im Wintersemester in meiner Vorlesung über Thermodynamik entwickelt hatte, habe ich dann vorgetragen

Der Energieinhalt wird dann proportional  $T^4$ , ebenso wie das nach dem Stephan-Boltzmannschen Gesetz bei der Hohlraumstrahlung für alle Temperaturen richtig ist. Würden die Körper ebenso wie die Hohlraumstrahlung ein „akustisches Spektrum“ besitzen, welches keine Grenze im endlichen hätte, so würde der Satz auch für diese für alle Temperaturen richtig sein. In Wirklichkeit gilt er nur unterhalb einer je nach dem Körper verschiedenen Temperatur. Wir werden später zeigen, daß er mit einem Fehler von ungefähr 1 Proz. richtig ist unterhalb  $T$  gleich 0,1 der für den Verlauf der spezifischen Wärmekurve schon oben genannten, charakteristischen Temperatur  $\Theta$ .

Wie in § 5 gezeigt wird, kann die Grenzschwingungszahl  $\nu_m$  und damit die charakteristische Temperatur  $\Theta$  dargestellt werden als Funktion der elastischen Konstanten des Körpers. Die Formel entspricht in ihrem Aufbau durchaus der bekannten Einsteinschen Formel, welche „die Eigenschwingungszahl“ mit der Kompressibilität in Zusammenhang bringt. Sie unterscheidet sich von dieser dahin, daß außer der Kompressibilität auch noch das Verhältnis Querdehnung zu Längsdehnung eine Rolle spielt. Das Auftreten dieser beiden Größen kann nicht wundernehmen, wenn man bedenkt, daß die Eigenschaften eines elastischen Körpers im Sinne der gewöhnlichen Elastizitätstheorie erst durch zwei Konstanten festgelegt sind. Überhaupt kann man bemerken, daß für Kristalle z. B. auch diese zwei Größen noch nicht ausreichen werden, sondern  $\Theta$  erst mittels aller elastischen Konstanten berechenbar ist.

Das Folgende wurde der Übersichtlichkeit wegen geteilt in einem Teil I, indem eine Formel für die spezifische Wärme auf Grund der auseinandergesetzten Überlegungen entwickelt und außerdem die Rechnung mit der Erfahrung verglichen wird. Die Formeln für die Konstitution des „akustischen

---

in der Sitzung in Bern der Schweizerischen physikal. Ges. und publiziert in den Arch. de Genève, Mars 1912, p. 256. Einige Zeit später haben Born u. v. Kármán unabhängig von jener Mitteilung in der Physik. Zeitschr. 13. p. 297. 1912 eine Formel für die spezifische Wärme entwickelt, welche auch, wie man sich leicht überzeugt, den beiden angegebenen Sätzen entspricht.

Spektrums“ werden in diesem Teile ohne Beweis benutzt. Der Beweis für dieselben wird nachgetragen in einem Teil II.

## Teil I.

## § 1. Energieinhalt und spezifische Wärme einatomiger fester Körper.

Nach der Elastizitätstheorie besitzt ein Körper vom Volumen  $V$  ein unendlich ausgedehntes Spektrum. Die Anzahl Eigenschwingungen  $z$  unterhalb einer bestimmten Grenze  $\nu$  ergibt sich nach Teil II § 10 zu

$$(1) \quad z = \nu^3 V F.$$

Darin bedeutet  $F$  eine Funktion der elastischen Konstanten und der Dichte  $\rho$ , welche sich z. B. unter Einführung der Kompressibilität  $\kappa$  und des Verhältnisses  $\sigma$  von Querdehnung zu Längsdehnung ausdrücken läßt in der Form

$$(2) \quad F = \frac{4\pi}{3} \rho^{2/3} \kappa^{1/2} \left[ 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \left( \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \right)^{1/2} + \frac{1}{3^{1/2}} \left( \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^{1/2} \right].$$

Für die Zwecke dieses Paragraphen genügt es, zu wissen, daß  $F$  eine für jeden Körper aus seiner Dichte und seinen elastischen Konstanten berechenbare Größe darstellt.

Es bestehe nun der Körper, dessen Energieinhalt  $U$  wir berechnen wollen aus  $N$  Atomen, so kann er als System von  $3N$  Freiheitsgraden nur  $3N$  Eigenschwingungen ausführen. Nehmen wir nun an, wie das in der Einleitung auseinander-gesetzt wurde, daß wir immer noch mit genügender Genauigkeit Gleichung (1) verwenden können, so ist die höchste Schwingungszahl  $\nu_m$  berechenbar aus dem Ansatz

$$(3) \quad 3N = \nu_m^3 V F$$

oder

$$(3') \quad \nu_m = \left( \frac{3N}{VF} \right)^{1/3}.$$

Nach (1) können wir durch Differentiation die Dichte der Spektrallinien ohne weiteres berechnen. Die Anzahl  $dz$ , welche auf den Schwingungszahlenintervall  $d\nu$  entfällt, hat danach den Wert

$$dz = 3VF\nu^2 d\nu.$$

Setzen wir für  $VF$  den aus (3) folgenden Wert

$$VF = \frac{3N}{\nu_m^3}$$

in diese Gleichung ein, so wird also

$$(4) \quad dz = 9N \frac{\nu^2 d\nu}{\nu_m^3}.$$

Andererseits wissen wir, daß nach der Planckschen Formel jeder Eigenschwingung mit der Schwingungszahl  $\nu$  die Energie

$$(5) \quad \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

zukommt, wenn wir mit  $h = 7,10 \cdot 10^{-27}$  erg sec das elementare Wirkungsquantum, mit  $k = 1,47 \cdot 10^{-16}$  erg die Boltzmannsche Konstante und mit  $T$  die absolute Temperatur bezeichnen. Durch Kombination von (4) und (5) erhalten wir also für die Energie  $U$  des Körpers den Ausdruck

$$(6) \quad U = \frac{9N}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^2 d\nu,$$

wobei wir die Integration über das ganze akustische Spektrum also von  $\nu = 0$  bis  $\nu = \nu_m$  zu erstrecken haben.

Definieren wir jetzt eine für den Körper charakteristische Temperatur  $\Theta$  durch den Ausdruck

$$(7) \quad \Theta = \frac{h\nu_m}{k}$$

und führen in unserem Integrale als neue dimensionslose Variable die Größe

$$(8) \quad \xi = \frac{h\nu}{kT}$$

ein, so können wir schreiben:

$$U = 9NkT \left( \frac{kT}{h\nu_m} \right)^3 \int_0^{\frac{kT}{h\nu_m}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1},$$

oder mit Berücksichtigung der Definitionsgleichung (7)

$$(9) \quad U = 9 N k T \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\Theta/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Bekanntlich (wie übrigens natürlich auch aus (9) folgt) würde dem Dulong-Petitschen Gesetz der Wert

$$U = 3 N k T$$

entsprechen. Die in (9) ausgesprochene Beziehung können wir also folgendermaßen in Worte fassen:

*Die Energie eines Körpers bekommt man, indem man den Dulong-Petitschen Wert multipliziert mit einem Faktor, welcher eine universelle Funktion ist von dem Verhältnis  $T/\Theta$ , d. h. Temperatur  $T$  dividiert durch charakteristische Temperatur  $\Theta$ .*

Setzen wir abkürzend

$$\frac{\Theta}{T} = x,$$

so hat jener Faktor nach (9) den Wert:

$$\frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Verstehen wir unter  $N$  die Anzahl Atome pro Atomgewicht, so stellt (9) die entsprechende Energie dar und wir bekommen dann durch Differentiation nach  $T$  die Atomwärme bei konstantem Volumen  $C_v$ , wofür wir, solange keine Verwechslung zu befürchten ist, einfach  $C$  ohne Index schreiben wollen. So ergibt sich aus (9)

$$(10) \quad C = 3 N k \left[ \frac{12}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{3x}{e^x - 1} \right],$$

wenn wir wieder mit  $x$  das Verhältnis  $\Theta/T$  bezeichnen.

Die Größe  $3 N k$  hat bekanntlich den Wert 5,955 cal.; bezeichnen wir denselben mit  $C_\infty$ , weil er in der Grenze für  $T = \infty$  erreicht wird, so können wir statt (10) auch schreiben

$$(10') \quad \frac{C}{C_\infty} = \frac{12}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{3x}{e^x - 1}.$$

Damit ist das in der Einleitung ausgesprochene Resultat bestätigt:

*Die spezifische Wärme einatomiger fester Körper ist eine universelle Funktion des Verhältnisses  $T/\Theta = 1/x$ .*

## § 2. Näherungsformeln und numerische Resultate.

### a) Näherung für kleine Werte von $x$ .

Betrachten wir zunächst hohe Temperaturen, bei denen das Verhältnis  $x = \Theta/T$  klein gegen 1 ist, so können wir den Integrand in (10') ersetzen durch seine erste Näherung

$$\frac{\xi^3}{e^\xi - 1} = \xi^2.$$

Das Integral bekommt dann den Wert  $x^3/3$ . Andererseits ist im Lim für  $x = 0$

$$\frac{3x}{e^x - 1} = \frac{3x}{x} = 3,$$

so daß wir für  $C/C_\infty$  erhalten:

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{12}{3} - 3 = 1,$$

ein Wert, der eben dem Dulong-Petitschen Gesetz entspricht.

Für das Folgende wollen wir von dieser Entwicklung noch einige weitere Glieder berechnen. Unter konsequenter Einführung der Abkürzung  $x = \Theta/T$  schreiben wir statt (9):

$$\frac{U}{\Theta C_\infty} = \frac{3}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Da andererseits

$$\frac{d}{dT} = -\frac{\Theta}{T^2} \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\Theta} x^2 \frac{d}{dx},$$

erhalten wir für das Verhältnis  $C/C_\infty$  den Wert:

$$(11) \quad \frac{C}{C_\infty} = -3x^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \right].$$

Die Entwicklung von  $1/e^\xi - 1$  nach Potenzen von  $\xi$  ist be-

kennt, sie läßt sich mit Hilfe der Bernouillischen Zahlen  $B$  darstellen in der Form <sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{e^{\xi}-1} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} + \xi \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \xi^{2n-2}.$$

Mittels dieser Darstellung erhält man durch Ausführung der in (11) angedeuteten Operationen für  $C/C_{\infty}$  die Reihe:

$$(12) \quad \frac{C}{C_{\infty}} = 1 - 3 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \frac{2n-1}{2n+3} x^{2n}.$$

Die ersten Bernouillischen Zahlen haben die Werte:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \\ B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \dots$$

Unter Benutzung dieser Werte kann man für (12) auch schreiben:

$$(12') \quad \frac{C}{C_{\infty}} = 1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{560} - \frac{x^6}{18144} + \frac{x^8}{633600} - \frac{x^{10}}{28063040} + \dots$$

Für die numerische Rechnung wurden von dieser Reihe nur die ersten vier Glieder benutzt. Sie ist dann mit weniger als 1 Proz. Fehler brauchbar für das Intervall  $x = 0$  bis  $x = 2$ . Würde man die sechs ausgeschriebenen Glieder benutzen, so würde das Intervall mit demselben maximalen Fehler ausgedehnt werden können bis über  $x = 3$ .

#### b) Näherung für große Werte von $x$ .

Für diesen Fall geht man am besten direkt von (10') aus. Berechnen wir wieder zuerst den Grenzwert für tiefe Temperaturen, d. h. also für sehr große Werte von  $x$ .

Das Glied  $3x/e^x - 1$  verschwindet exponentiell, andererseits können wir im Integral die obere Grenze  $x$  durch  $\infty$  ersetzen und erhalten dann für dasselbe den Zahlenwert:

1) Man vergleiche z. B. J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, Paris 1886, 2. p. 213. Die Reihe konvergiert ebenso wie die aus derselben für  $C/C_{\infty}$  erhaltenen nur für Werte der Variablen, welche kleiner wie  $2\pi$  sind.



$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} = \int_0^{\infty} \xi^2 (e^{-\xi} + e^{-2\xi} + e^{-3\xi} + \dots) d\xi$$

$$= 6 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right).$$

Die Reihe in der Klammer tritt schon in der Strahlungstheorie auf<sup>1)</sup>; sie hat den Wert ( $B_2$  ist wieder die zweite Bernouillische Zahl):

$$\frac{8\pi^4}{4!} B_2 = \frac{\pi^4}{90} = 1,0823.$$

Durch Einsetzen in (10') erhalten wir also für tiefe Temperaturen:

$$(13) \quad \frac{C}{C_{\infty}} = \frac{4}{5} \pi^4 \frac{1}{x^3} = \frac{4\pi^4}{5} \frac{T^3}{\Theta^3} = 77,938 \frac{T^3}{\Theta^3}.$$

Hiermit wird der zweite in der Einleitung hervorgehobene Satz bestätigt.

*Für genügend tiefe Temperaturen wird die spezifische Wärme proportional der dritten Potenz der absoluten Temperatur.*

Außerdem kennen wir den Proportionalitätsfaktor; er hat nach (13) den Wert  $77,938/\Theta^3$ . Weder die Einsteinsche noch die Nernst-Lindemannsche Formel entsprechen diesem Gesetz; beide verlangen für die spezifische Wärme in der Nähe des absoluten Nullpunktes ein exponentielles Verschwinden. Wir werden im Folgenden an Hand des vorhandenen Beobachtungsmaterials die Richtigkeit von (13) bestätigen. Es mag nebenbei noch bemerkt werden, daß (13) nicht im Widerspruch zum Nernstschen Wärmesatze steht, da die spezifische Wärme für tiefe Temperaturen noch genügend stark verschwindet, um dem Integral

$$\int_0^T \frac{C}{T} dT$$

einen endlichen Wert zu erteilen.

Die Proportionalität mit  $T^3$  ist eine direkte Folge des Umstandes, daß die Anzahl der Schwingungen pro Schwingungs-

1) Vgl. M. Planck, Wärmestrahlung, Leipzig 1906. p. 161.

zahlenintervall  $d\nu$  der Größe  $\nu^3 d\nu$  proportional zu setzen ist. Nun kommen einerseits bei tiefen Temperaturen hauptsächlich die langsameren Schwingungen in Betracht, andererseits werden wir die Proportionalität mit  $\nu^3 d\nu$  aus den elastischen Gleichungen folgern, welche zur Berechnung der langsameren Schwingungen sicher ganz unanfechtbar sind. Wir können demnach schließen, daß die Proportionalität mit  $T^3$  sich nicht allein für einatomige, sondern für alle Körper bei genügend tiefen Temperaturen ergeben wird.<sup>1)</sup>

Um die Genauigkeit des Gesetzes (13) auch für höhere Temperaturen zu prüfen und zugleich für solche Bereiche die Formel (10') berechnen zu können, wollen wir auch hier die Reihenentwicklung berechnen, von der (13) das erste Glied ist. Entwickeln wir in (10') den Integranden nach Potenzen von  $e^{-\xi}$ , so erhalten wir

$$\frac{\xi^3}{e^{\xi}-1} = \xi^3 e^{-\xi} (1 + e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \dots) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \xi^3 e^{-n\xi}.$$

Andererseits findet man leicht durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x \xi^3 e^{-n\xi} d\xi &= \int_0^{\infty} \xi^3 e^{-n\xi} d\xi - \int_x^{\infty} \xi^3 e^{-n\xi} d\xi \\ &= \frac{6}{n^4} - x^4 e^{-nx} \left( \frac{1}{nx} + \frac{3}{n^2 x^2} + \frac{6}{n^3 x^3} + \frac{6}{n^4 x^4} \right), \end{aligned}$$

so daß wir für das in (10') auftretende Integral schreiben können:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^{\xi}-1} d\xi &= 6 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \\ &\quad - x^4 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nx} \left( \frac{1}{nx} + \frac{3}{n^2 x^2} + \frac{6}{n^3 x^3} + \frac{6}{n^4 x^4} \right). \end{aligned}$$

1) Es sei noch bemerkt, daß es nach (13) keine Temperatur mehr geben kann, für welche bei tiefen Temperaturen die Strahlungsenergie größer wäre, wie die Energie der Atome, wie das sowohl nach der Einsteinschen wie nach der Nernst-Lindemannschen Formel für alle Körper der Fall ist, es sei denn, daß Körper existieren, deren charakteristische Temperatur  $\Theta$  größer wie 135 000° wäre.

Für  $C/C_\infty$  selbst ergibt (10') schließlich die Darstellung:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{C}{C_\infty} &= \frac{72}{x^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} \\ &- 12x \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nx} \left( \frac{1}{nx} + \frac{3}{n^2 x^2} + \frac{6}{n^3 x^3} + \frac{6}{n^4 x^4} \right) - \frac{3x}{e^x - 1} \end{aligned} \right.$$

Ersetzen wir noch  $\sum 1/n^4$  durch den früher angegebenen Wert  $\pi^4/90$ , so können wir statt (14) auch schreiben:

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{C}{C_\infty} &= \frac{4\pi^4}{5} \frac{1}{x^3} - \frac{3x}{e^x - 1} \\ &- 12x \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nx} \left( \frac{1}{nx} + \frac{3}{n^2 x^2} + \frac{6}{n^3 x^3} + \frac{6}{n^4 x^4} \right) \end{aligned} \right.$$

Man erhält für das ganze Intervall von  $x=\infty$  bis  $x=2$  eine Genauigkeit über 1<sup>0</sup>/<sub>100</sub>, wenn man von der Summe höchstens die ersten vier Glieder berücksichtigt; bei einer Genauigkeit von 1 Proz. genügen schon höchstens drei Glieder. Von  $x=12$  an ist mit einem kleineren Fehler als 1 Proz.  $C/C_\infty$  durch den Ausdruck  $\frac{4\pi^4}{5} \frac{1}{x^3}$  allein darstellbar, d. h. von  $T = \Theta/12$  bis  $T = 0$  gilt die Proportionalität mit  $T^3$  mit einer größeren Genauigkeit als 1 Proz.

Unter Benutzung von (12') und (14') wurden schließlich noch die Werte von  $C/C_\infty$  als Funktion von  $x = \Theta/T$  berechnet. Sie sind in der Tab. I, p. 803 eingetragen, in welcher auch die Werte von  $1/x = T/\Theta$  angegeben sind.

Um einen Vergleich mit den beiden anderen bis jetzt benutzten Formeln: die Einsteinsche

$$(15) \quad \frac{C}{C_\infty} = \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^3}$$

und die Nernst-Lindemannsche

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3 e^{x/2}}{(e^{x/2} - 1)^2} \right\}$$

zu ermöglichen, sind in der vierten und sechsten Spalte auch die Werte dieser Funktionen eingetragen.<sup>1)</sup>

1) Die Zahlenwerte wurden nicht neu gerechnet, sondern den Tabellen von B. Pollitzer: Die Berechnung chemischer Affinitäten nach

Tabelle I.

$x = \frac{\Theta}{T}$	$\frac{1}{x} = \frac{T}{\Theta}$	$\frac{C}{C_{\infty}}$	$\frac{C}{C_{\infty}}$ Einstein	Ab- weichung in Proz.	$\frac{C}{C_{\infty}}$ Nernst- Lindemann	Ab- weichung in Proz.
0,250	4	0,997	0,994	- 0,3	0,997	0
0,333	3	0,994 <sup>s</sup>	0,989	- 0,5	0,994	0
0,500	2	0,988	0,979	- 0,9	0,988	0
0,667	1,5	0,978	0,959	- 1,9	0,977	- 0,1
1,000	1,0	0,952	0,920	- 3,3	0,951	- 0,1
1,111	0,9	0,941	0,902	- 4,1	0,939	- 0,2
1,250	0,8	0,926	0,878	- 5,2	0,924	- 0,2
1,429	0,7	0,904 <sup>s</sup>	0,841	- 7,0	0,904	0
1,667	0,6	0,872 <sup>s</sup>	0,799	- 8,3	0,873	0
2,000	0,5	0,825	0,724	- 12,2	0,823	- 0,2
2,500	0,4	0,745	0,610	- 18,1	0,744	- 0,1
3,333	0,3	0,607 <sup>s</sup>	0,428	- 29,5	0,615	+ 1,2
4,000	0,25	0,503	0,304	- 39,5	0,514	+ 2,2
4,021	0,2488	0,500	—	—	—	—
5,000	0,20	0,369	0,171	- 51,1	0,390	+ 5,7
6,667	0,15	0,213	0,0598	- 72,0	0,242	+ 13,6
10,00	0,10	0,0758	0,0045	- 94,2	0,0875	+ 15,4
13,33	0,075	0,0328	—	—	0,0284	- 13,4
20,00	0,050	0,00974	—	—	0,00227	- 76,3
40,00	0,025	0,00122	—	—	0,000000412	-100
$\infty$	0	0	0	-100	0	-100

Die fünfte Spalte enthält die Abweichung zwischen den Werten der Einsteinschen und unserer Funktion (Spalte 4 bzw. Spalte 3) in Prozenten der letzteren. Wie man sieht, nimmt diese prozentuale Differenz schon verhältnismäßig bald erhebliche Werte an. Viel günstiger verhält sich in dieser Beziehung die Nernst-Lindemannsche Formel; bis  $T/\Theta = 0,4$  sind die Abweichungen beinahe unmerklich, sie sind indessen vorhanden und zwar sind sie negativ.<sup>1)</sup> Nur kommen sie bei der Genauigkeit der Tabelle kaum zum Vorschein. Bei  $T/\Theta = 0,4$  etwa verschwinden sie. Dann wird die prozentuale Differenz wieder größer und sie ist zuerst positiv, geht dann

dem Nernstschen Wärmetheorem, Stuttgart 1912, p. 165 entnommen bzw. durch Interpolation zwischen den dort angegebenen Zahlen berechnet.

1) Vgl. noch die Bemerkung auf p. 805, § 3.

aber wieder zurück, wird Null und erreicht schließlich sehr bald erhebliche negative Werte. Daß wir die Differenz in der Nähe des absoluten Nullpunktes zu 100 Proz. rechnen müssen, kommt dadurch zustande, daß nach Einstein, sowie Nernst-Lindemann die spezifische Wärme exponentiell verschwinden soll, während sie nach unserer Formel nur verschwindet wie  $T^3$ .

Schließlich haben wir noch in Fig. 1 die verschiedenen Kurven für  $C/C_\infty$  als Funktion von  $1/x = T/\Theta$  aufgetragen. Die ausgezogene Kurve (1) entspricht unserer Formel (10). Die Nernst-Lindemannsche Funktion wird durch Kurve (2) dargestellt, welche wir, um sie besser von (1) zu

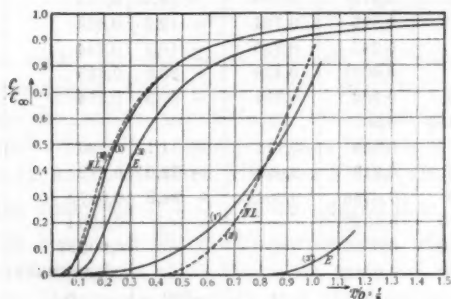


Fig. 1.

unterscheiden, gestrichelt eingetragen haben. Die Kurve (3) stellt die Einsteinsche Funktion dar. Der Spalte (7) entsprechend sollte die Nernst-Lindemannsche Funktion zuerst unterhalb, dann oberhalb und nachher wieder unterhalb der Kurve (1) verlaufen. Bei der Genauigkeit der Figur fallen aber beide Kurven im ersten Intervall zusammen. Die Einsteinsche Funktion ist durchweg kleiner wie (10). Die Verhältnisse für tiefe Temperaturen kommen bei dem angenommenen Maßstab sehr schlecht zur Darstellung. Wir haben deshalb in derselben Fig. 1 noch die unteren Teile der drei Kurven über zehnfach vergrößerte Abszissen in einem zehnfach vergrößerten Maßstabe aufgetragen. Die Nummern (1'), (2'), (3') entsprechen den Nummern (1), (2), (3) der ganzen Kurven.

§ 3. Versuch einer Begründung der Nernst-Lindemannschen Form der Funktion für  $C/C_\infty$ .

Die Nernst-Lindemannsche Funktion hat sich in einem großen Temperaturbereich so gut zur Darstellung der Beobachtungen bewährt, daß sich von selbst die Überzeugung aufdrängt, daß dieselbe mit der theoretisch begründeten Formel in einem einfachen, wenn auch vielleicht mehr äußerlichen Zusammenhange stehen müsse. Wir wollen im folgenden zeigen, in welchem Sinne man dieselbe als angenäherte Darstellung für unsere Funktion auffassen kann.

Nach unseren Überlegungen gilt für  $C/C_\infty$  die Formel (10')

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{12}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{3x}{e^x - 1};$$

die Nernst-Lindemannsche Formel lautet mit derselben Bezeichnung  $x = \Theta/T$ :

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} + \left( \frac{x}{2} \right)^2 \frac{e^{x/2}}{(e^{x/2} - 1)^2} \right\}.$$

Wir wollen nun an der Einführung von  $x/2$  neben  $x$  festhalten und uns die folgende Frage vorlegen. Macht man für  $C/C_\infty$  den Ansatz

$$(16) \quad \frac{C}{C_\infty} = a \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} + b \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^2 e^{x/2}}{(e^{x/2} - 1)^2},$$

wie muß man dann die beiden Konstanten  $a$  und  $b$  wählen, damit das Integral der Differenz von (10') und (16), erstreckt über den Temperaturbereich von  $T=0$  bis  $T=\infty$ , verschwindet? Graphisch bedeutet, daß also mit Bezug auf Fig. 1, daß die zwischen den beiden Kurven (1) und (2) eingeschlossene Fläche mit Rücksicht auf die Vorzeichen im ganzen den Inhalt Null haben soll.<sup>1)</sup>

1) Nach der Figur sieht es so aus, als ob in der Zeichnung die Forderung nicht erfüllt wäre. Die Ursache liegt darin, daß bei dem angenommenen Maßstabe die negativen Differenzen, welche tatsächlich für hohe Temperaturen vorhanden sind, nicht mehr zur Darstellung gebracht werden können. Von dem Vorhandensein derselben überzeugt man sich

Das Temperaturintegral von (10') ist nichts weiter als der Energieinhalt, der schon in (9) berechnet wurde, dividiert durch  $C_\infty = 3 Nk$ . Dasselbe hat also unter konsequenter Benutzung der Abkürzung  $x = \Theta/T$  den Wert

$$(17) \quad \Theta \frac{3}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Das entsprechende Integral von (16), das eine ähnliche Bedeutung hat, ist

$$(17') \quad \Theta \left\{ \frac{a'}{e^x - 1} + \frac{b/2}{e^{x/2} - 1} \right\}.$$

Wollen wir nun unserer Forderung genügen, so muß also die Differenz der beiden Werte (17) und (17') nach Einsetzen der Grenzen  $T = 0$  und  $T = \infty$  verschwinden, d. h. es muß sein:

$$(18) \quad \left[ \frac{3}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{a}{e^x - 1} - \frac{b/2}{e^{x/2} - 1} \right]_{T=0}^{T=\infty} = 0.$$

Nun gehört zu  $T = 0$  der Wert  $x = \infty$ , für diesen verschwindet aber der Klammerwert von (18). Andererseits gehört

am besten auf Grund der Reihenentwickelungen für große Werte von  $T$ , d. h. kleine Werte von  $x$ . Nach (12') gilt für unsere Funktion

$$\frac{C}{C_\infty} = 1 - \frac{x^3}{20} + \frac{x^4}{560}.$$

Für die Nernst-Lindemannsche Funktion erhält man leicht unter Benutzung der in § 2 für  $1/e^\xi - 1$  angegebenen Entwickelung:

$$\frac{C}{C_\infty} = 1 - \frac{5}{96} x^3 + \frac{17}{7680} x^4.$$

Bringen wir die Koeffizienten unserer Funktion auf dieselben Nenner, so erhalten wir

$$\frac{C}{C_\infty} = 1 - \frac{4,8}{96} x^3 + \frac{13,71}{7680} x^4.$$

Da  $5 > 4,8$ , so ist der Wert der Nernst-Lindemannschen Funktion, wie behauptet, zunächst kleiner wie der Wert der unserigen. Dadurch, daß andererseits  $17 > 13,71$ , wird durch die Entwickelungen auch schon angedeutet, daß die Ordinaten für noch kleinere Temperaturen einander wieder gleich werden, wie wir das ja früher gefunden haben, für  $T/\Theta$  etwa gleich 0,4.



zu  $T = \infty$  der Wert  $x = 0$ . Für kleine Werte von  $x$  gelten für unsere Größen die Entwicklungen:

$$\frac{3}{x^4} \int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{3}{x^4} \int_0^x (\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 + \dots) d\xi = \frac{1}{x} - \frac{3}{8} + \dots,$$

$$\frac{a}{e^x - 1} = \frac{a}{x} - \frac{a}{2} + \dots,$$

$$\frac{b/2}{e^{x/2} - 1} = \frac{b}{x} - \frac{b}{4} + \dots,$$

wobei wir nur die Glieder berücksichtigt haben, welche für  $x = 0$  unendlich werden oder doch endlich bleiben. Die Bedingung (18) läßt sich jetzt schreiben:

$$(18) \quad \lim_{x=0} \left[ \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{8} \right) - a \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) - b \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \right] = 0,$$

d. h.  $a$  und  $b$  müssen den beiden Gleichungen genügen:

$$(19) \quad \begin{cases} a + b = 1, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(20) \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2},$$

d. h. eben diejenigen Werte von  $a$  und  $b$ , welche Nernst und Lindemann in ihrer Formel benutzen.

Wir können demnach behaupten, daß, sofern unsere Formel als richtig angesehen wird, die Nernst-Lindemannsche Formel eine Näherung für dieselbe abgibt im obigen Sinne.

#### § 4. Vergleich mit der Erfahrung.

In diesem Paragraphen soll durch einige Kurvenbilder die Übereinstimmung unserer Formel mit den Beobachtungen an Diamant, Aluminium, Kupfer, Silber und Blei veranschaulicht werden. Nebenbei ergibt sich die Richtigkeit der Aussage, wonach bei tiefen Temperaturen die spezifische Wärme proportional  $T^3$  werden soll. Die beobachteten Werte entnehmen wir den Tabellen von Nernst-Lindemann.<sup>1)</sup> Dieselben ent-

1) W. Nernst-Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochem. p. 817. 1911.

halten die spezifische Wärme bei konstantem Druck  $C_p$ . Die Umrechnung auf die spezifische Wärme  $C_v = C$  bei konstantem Volumen geschah nach der ebendort angegebenen Formel:

$$(21) \quad C_v = C_p - A C_p^2 T,$$

in welcher  $A$  eine Konstante bedeutet, welche für Al, Cu, Ag und Pb der dortigen Tabelle entnommen wurde. Für Diamant geschah die Umrechnung nach der anderen dort angegebenen Formel

$$(21') \quad C_v = C_p - A_0 C_p^2 \frac{T}{T_s},$$

in welcher  $A_0 = 0,0214$  und  $T_s$  die Schmelztemperatur bedeutet, für welche auch wir  $T_s = 3600^\circ$  annehmen.

Es folgen nun zunächst die Tabellen, in denen zusammengestellt sind: die Temperatur  $T$ , die spezifische Wärme bei konstantem Druck  $C_p$ , die Größe  $\Delta C_p$  nach (21) oder (21'), welche man von  $C_p$  subtrahieren muß, um  $C_v$  zu bekommen, die spezifische Wärme bei konstantem Volumen  $C_v$  und schließlich das Verhältnis  $C_v/C_\infty$ . Für  $C_\infty$  wurde dabei der Wert  $C_\infty = 5,955$  cal. angenommen.

Tabelle II.  
Diamant ( $T_s = 3600^\circ$ ).

$T$	$C_p$	$\Delta C_p$	$C_v$	$C_v/C_\infty$
30	0,00	—	0,00	0,000
42	0,00	—	0,00	0,000
88	0,03	—	0,03	0,005
92	0,03	—	0,03	0,005
205	0,62	—	0,62	0,104
209	0,66	—	0,66	0,111
220	0,72	—	0,72	0,121
222	0,76	—	0,76	0,128
232	0,86	—	0,86	0,145
243	0,95	—	0,95	0,160
262	1,14	—	1,14	0,191
284	1,35	—	1,35	0,227
306	1,58	—	1,58	0,266
331	1,84	0,01	1,83	0,308
358	2,12	0,01	2,11	0,354
413	2,66	0,02	2,64	0,444
1169	5,45	0,21	5,24	0,880

Tabelle III.

Aluminium ( $A = 2,2 \cdot 10^{-5}$ ).

$T$	$C_p$	$\Delta C_p$	$C_v$	$C_v / C_\infty$
32,4	0,25	—	0,25	0,042
35,1	0,33	—	0,33	0,055
83,0	2,41	0,01	2,40	0,403
86,0	2,52	0,01	2,51	0,421
88,3	2,62	0,01	2,61	0,438
137	3,97	0,04	3,93	0,660
235	5,32	0,15	5,17	0,868
331	5,82	0,25	5,57	0,935
433	6,10	0,35	5,75	0,966
555	6,48	0,52	5,98	1,005

Tabelle IV.

Kupfer ( $A = 1,3 \cdot 10^{-5}$ ).

$T$	$C_p$	$\Delta C_p$	$C_v$	$C_v / C_\infty$
23,5	0,22	—	0,22	0,037
27,7	0,32	—	0,32	0,054
33,4	0,54	—	0,54	0,092
87,0	3,33	0,01	3,32	0,558
88,0	3,38	0,01	3,37	0,566
137	4,57	0,04	4,53	0,761
234	5,59	0,09	5,50	0,924
290	5,79	0,13	5,66	0,951
323	5,90	0,15	5,75	0,966
450	6,09	0,22	5,87	0,985

Tabelle V.

Silber ( $A = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ).

$T$	$C_p$	$\Delta C_p$	$C_v$	$C_v / C_\infty$
35,0	1,58	—	1,58	0,266
39,1	1,90	—	1,90	0,319
42,9	2,26	—	2,26	0,380
45,5	2,47	0,01	2,46	0,413
51,4	2,81	0,01	2,80	0,470
53,8	2,90	0,01	2,89	0,502
77,0	4,07	0,03	4,04	0,678
100	4,86	0,06	4,80	0,806
200	5,78	0,17	5,61	0,944
273	6,00	0,25	5,75	0,965
331	6,01	0,30	5,71	0,960
535	6,46	0,56	5,90	0,990
589	6,64	0,65	5,99	1,006

Tabelle VI.

Blei ( $A = 3,0 \cdot 10^{-5}$ ). <sup>1)</sup>

$T$	$C_p$	$\Delta C_p$	$C_v$	$C_v/C_\infty$
23,0	2,96	0,01	2,95	0,495
28,8	3,92	0,01	3,91	0,656
36,8	4,40	0,02	4,38	0,735
38,1	4,45	0,02	4,43	0,744
85,5	5,65	0,08	5,57	0,935
90,2	5,71	0,09	5,62	0,945
200	6,13	0,22	5,91	0,993
273	6,31	0,34	5,97	1,002
290	6,33	0,35	5,98	1,004
332	6,41	0,41	6,00	1,007
409	6,61	0,54	6,07	1,02

In Fig. 2 sind die Verhältnisse bei Diamant dargestellt, und zwar wurde dieser Fall dazu benutzt, die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Formeln einigermaßen zu erproben. Das geschah folgendermaßen. Der Wert  $C/C_\infty = 0,880$  bei  $T = 1169^\circ$  wurde als absolut richtig angenommen und aus diesem Werte *allein* die charakteristische Temperatur  $\Theta$  berechnet, einmal unter der Voraussetzung, daß die Einsteinsche Formel richtig sei, dann unter der Voraussetzung, daß die Nernst-Lindemannsche richtig sei und drittens unter Zugrundelegung unserer Formel.<sup>2)</sup> Es wurde gefunden:

$$C/C_\infty = 0,880 \text{ bei } T = 1169^\circ$$

entspricht nach

Einstein . . . . .	$\Theta = 1450^\circ$
Nernst-Lindemann . . . .	$\Theta = 1884^\circ$
unserer Formel . . . . .	$\Theta = 1895^\circ$

Man bemerkt, daß für  $\Theta$  in den zwei letzten Fällen Zahlen gefunden werden, welche bis auf ca.  $1/2$  Proz. übereinstimmen.

1) Die Konstante  $A$  zur Umrechnung von  $C_p$  auf  $C_v$  scheint etwas zu niedrig gegriffen. Wir haben aber absichtlich keine Änderung an der von Nernst und Lindemann angegebenen Zahl angebracht.

2) Man braucht die Rechnungen natürlich nicht mehr wirklich auszuführen, sondern kann in der Tabelle des § 2 interpolieren. Um ganz sicher zu gehen, haben wir in diesem Falle aber die Interpolation vermieden und neu gerechnet.

Das ist durchweg der Fall, so daß erfreulicherweise die schon von Nernst-Lindemann für  $\Theta$  berechneten Werte keine wesentliche Änderung mehr erfahren.

Mit diesen drei Werten von  $\Theta$  wurde dann mit Hilfe der Tab. I die drei Kurven der Fig. 2 gezeichnet. Die in Tab. II aufgeführten beobachteten Werte wurden als Kreuze eingetragen. Die mit  $E$  bezeichnete Kurve ist die Einsteinsche,

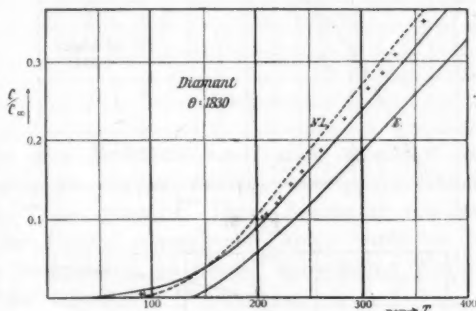


Fig. 2.

wie man sieht, verläuft sie erheblich zu niedrig. Die gestrichelte mit N.L. bezeichnete Kurve entspricht dem Nernst-Lindemannschen, die ausgezogene, nicht bezeichnete Kurve unserem theoretischen Gesetz. Erstere verläuft etwas zu hoch, letztere etwas zu niedrig; in Anbetracht der Berechnungsart von  $\Theta$  ist aber die Übereinstimmung als gut zu bezeichnen.

Wir wollen nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß erstens der Wert  $C/C_\infty = 0,880$  bei  $T = 1169^\circ$  an sich nicht so besonders sicher ist, die Korrektur auf  $C_\infty$  beträgt ja schon 4 Proz. und ist außerdem unter Benutzung des hypothetischen Schmelzpunktes  $T_s = 3600^\circ$  berechnet. Zweitens kann man natürlich durch eine etwas andere Wahl von  $\Theta$  eine erheblich bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen erreichen.  $\Theta = 1830^\circ$  würde den Anforderungen gerecht werden. Um indessen die Figur nicht weiter zu komplizieren, haben wir davon abgesehen, letztere Kurve noch einzutragen.

Die Figg. 3, 4, 5, 6 enthalten die beobachteten Werte für Aluminium, Kupfer, Silber, Blei, als Kreuze eingezeichnet

und die zugehörige theoretische Kurve nach unserer Formel bzw. nach Tab. I berechnet. Die Figuren dürften ohne weiteres verständlich sein; sie zeigen durchweg eine recht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

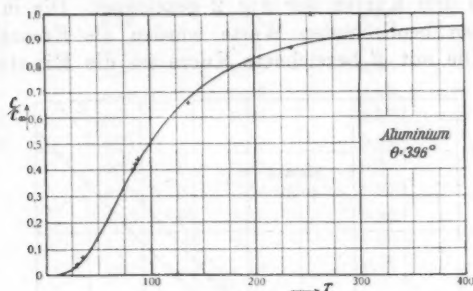


Fig. 3.

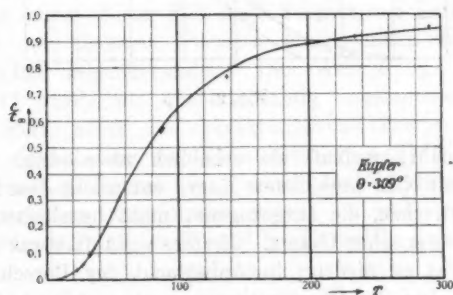


Fig. 4.

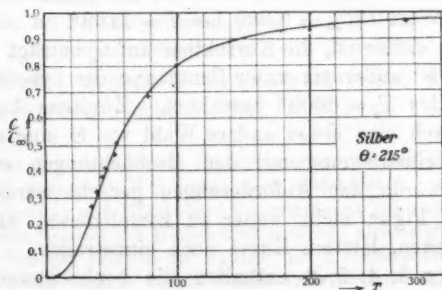


Fig. 5.

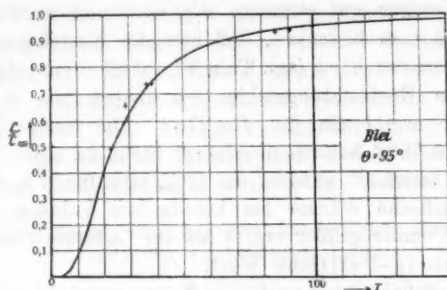


Fig. 6.

Um dem Bedürfnis nach einer möglichst eingehenden Diskussion gerecht zu werden, haben wir schließlich noch folgende Probe gemacht. Unter Benutzung von den in Tab. I für unsere Formel angegebenen Zahlen wurde bei Silber durch lineare Interpolation zu jedem beobachteten Werte von  $C/C_\infty$  und  $T$  das zugehörige  $\Theta$  berechnet.

Das Resultat enthält folgende Tab. VII:

Tabelle VII.

$T$	$C/C_\infty$	$\Theta$	$\Delta$
35,0	0,266	210	-3,5
39,1	0,319	212	-1,5
42,9	0,380	210	-3,5
45,5	0,413	210	-3,5
51,4	0,470	216	+2,5
53,8	0,502	215	+1,5
77,0	0,678	218	+4,5
100	0,806	210	-3,5
200	0,944	216	+2,5
273	0,965	218	+4,5
331	0,960	288	—
535	0,990	236	—
589	1,006	—	—

Die zehn ersten Zahlen für  $\Theta$  stimmen recht gut untereinander. Die Abweichungen  $\Delta$  von ihrem Mittelwert 213,5, welche in der letzten Spalte angeführt sind, mögen das be-



stätigen. Weniger gut stimmen die elte und zwölfte Zahl. Indessen muß man bedenken, daß hier die Korrektion auf  $C_0$  schon recht erheblich ist (vgl. Tab. V). Außerdem scheint bei  $T = 331^\circ$  ein Beobachtungsfehler vorzuliegen, da sich hier  $C/C_\infty$  kleiner ergibt als für  $T = 273^\circ$ . Die letzte Zahl für  $C/C_\infty$  bei  $T = 589^\circ$  konnte überhaupt nicht zu einer Berechnung von  $\Theta$  verwandt werden, da  $C/C_\infty$  sich (nach Korrektion auf die spezifische Wärme bei konstantem Volumen) immer noch um 6 Promille größer ergibt als der äußerste theoretisch zulässige Dulong-Petitsche Wert.

Schließlich haben wir noch eine Frage zu erledigen, welche für unsere Theorie von besonderer Wichtigkeit ist. Läßt das vorhandene Zahlenmaterial schon erkennen, daß unsere Behauptung die spezifische Wärme sei bei tiefen Temperaturen proportional  $T^3$ , richtig ist? Wir müssen diese Frage in bejahendem Sinne beantworten, wie folgende Tabelle zeigt.

Tabelle VIII.

	$T$	$C/C_\infty$	$\Theta$	$\Theta$
Diamant	205	0,104	1860	1830
Aluminium	32,4	0,0420	398	396
Kupfer	23,5	0,037	302	309

In Spalte 2 und 3 stehen je eine Beobachtung für  $C/C_\infty$  bei tiefer Temperatur (vgl. die früheren Tabellen). Früher fanden wir nun in diesem Grenzfalle für  $C/C_\infty$  die Darstellung:

$$\frac{C}{C_\infty} = \frac{4\pi^4}{5} \frac{T^3}{\Theta^3} = 77,94 \frac{T^3}{\Theta^3}.$$

Bei genügend tiefen Temperaturen sollen wir also  $\Theta$  berechnen können nach der Formel

$$\Theta = \left( 77,94 \frac{C_\infty}{C} \right)^{1/3} T.$$

Das geschah; das Resultat zeigt Spalte 4. Spalte 5 enthält zum Vergleich die Werte von  $\Theta$ , welche bei der Zeichnung der früheren Kurven zugrunde gelegt wurden. Wie man sieht ist die Übereinstimmung sehr gut.

Immerhin dürfte es als sehr erwünscht erscheinen, an einer Reihe von Beobachtungen bei einer einzelnen Substanz die Gültigkeit der Proportionalität mit  $T^3$  zu prüfen. Diamant

wäre für solche Versuche wohl am geeignetsten, da der Temperaturbereich, in dem zu messen wäre, verhältnismäßig leicht zugänglich ist. Er erstreckt sich von  $T=0$  bis etwa  $T=200$ . Auch sei noch darauf hingewiesen, daß ebenso wie die spezifische Wärme, der Ausdehnungskoeffizient bei tiefen Temperaturen proportional  $T^3$  sein muß, sofern man nach Grüneisen die Proportionalität jener beiden Größen zugibt.<sup>1)</sup>

§ 5. Die Berechnung der charakteristischen Temperatur  $\Theta$  aus den elastischen Konstanten.

In § 1 haben wir eine Größe  $F$  angegeben, berechenbar aus Dichte  $\rho$ , Kompressibilität  $\kappa$  und Verhältnis von Querdehnung zu Längsdehnung  $\sigma$ , mit der die Grenzschwingungszahl  $\nu_m$  unseres elastischen Spektrums in einfacher Weise zusammenhängt.

Wir fanden nämlich

$$\nu_m = \left( \frac{3N}{VF} \right)^{1/2}$$

und

$$F = \frac{4\pi}{3} \rho^{1/2} \kappa^{1/2} \left[ 2 \left( \frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)} \right)^{1/2} + \left( \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \right)^{1/2} \right].$$

Für die Begründung dieser Formel verweisen wir auf den zweiten Teil.

Aus  $\nu_m$  und den beiden universellen Konstanten  $h$  und  $k$  wurde in Gleichung (7) eine Größe  $\Theta$

$$\Theta = \frac{h \nu_m}{k}$$

zusammengestellt, welche die Rolle einer für den Körper charakteristischen Temperatur spielt und die einzig, wie wir gesehen haben, für den Verlauf der spezifischen Wärme als Funktion der Temperatur maßgebend ist. Je höher  $\Theta$ , bei um so höherer Temperatur  $T$  fangen die Körper an, Abweichungen vom Dulong-Petitschen Gesetz zu zeigen.

Ersetzen wir in dem Ausdruck von  $\Theta$  die Grenzschwingungszahl  $\nu_m$  durch ihre Darstellung in  $N$ ,  $V$  und  $F$ , so kommt:

$$(22) \quad \Theta = \frac{h}{k} \left( \frac{3N}{VF} \right)^{1/2}.$$

1) Wir vernachlässigen dabei die Differenz zwischen  $C_p$  und  $C_v$ , was bei den Temperaturen, welche hier in Betracht kommen, ohne weiteres zulässig ist.

Nehmen wir von dem betreffenden Körper ein Stück, dessen Masse dem Atomgewicht  $M$  gleich ist, so ist die Zahl  $N$  der Atome für alle einatomigen Körper dieselbe und hat den Wert  $N = 5,66 \cdot 10^{23}$ .<sup>1)</sup> Andererseits ist

$$V = \frac{M}{\varrho},$$

so daß wir statt (22) schreiben können

$$(23) \quad \Theta = \frac{h}{k} N^{1/2} \left( \frac{3 \varrho}{M F} \right)^{1/2} = \frac{h}{k} \left( \frac{9 N}{4 \pi} \right)^{1/2} \frac{1}{M^{1/2} \varrho^{1/6} x^{1/2}} \frac{1}{f^{1/2}(\sigma)},$$

wenn wir mit  $f(\sigma)$  den Ausdruck

$$(24) \quad f(\sigma) = 2 \left( \frac{2}{3} \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^{3/2} + \left( \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} \right)^{3/2}$$

bezeichnen.

Setzen wir schließlich noch

$$N = 5,66 \cdot 10^{23}, \quad h = 7,10 \cdot 10^{-27}, \quad k = 1,47 \cdot 10^{-16},$$

so wird

$$(25) \quad \Theta = \frac{35,74 \cdot 10^{-4}}{M^{1/2} \varrho^{1/6} x^{1/2}} \frac{1}{f^{1/2}(\sigma)}.$$

Bekanntlich hat Einstein zuerst auf einen Zusammenhang zwischen „der Eigenschwingungszahl des Atoms“ und den elastischen Konstanten hingewiesen.<sup>2)</sup> Berechnet man aus seiner Eigenschwingungszahl durch Multiplikation mit  $h/k$  die zugehörige charakteristische Temperatur  $\Theta$ , so findet man:

$$(25) \quad \Theta = \frac{7,89 \cdot 10^{-4}}{M^{1/2} \varrho^{1/6} x^{1/2}}.$$

Abgesehen von der Verschiedenheit der Bedeutung der Einsteinschen einfachen Schwingungszahl des Atoms und unserer Grenzschnwingungszahl, weichen die beiden Formeln in zweifacher Weise voneinander ab. Erstens sind die Zahlenfaktoren verschieden, zweitens fehlt bei der Einsteinschen Formel der von dem Verhältnis  $\sigma$  von Querdehnung zu Längsdehnung abhängige Faktor  $1/f^{1/2}(\sigma)$ . Prüfen wir jetzt die beiden Formeln an Hand des Erfahrungsmateriales über die elastischen

1) Wir benutzen (auch für  $h$  und  $k$ ) die Werte, welche neuerdings von Paschen-Gerlach angegeben wurden: Ann. d. Phys. 38. p. 41. 1912.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 34. p. 170. 1911.

Konstanten und über die spezifische Wärme. Diesem Zwecke dient Tab. IX.

Tabelle IX.

	$M$	$\varrho$	$\alpha \cdot 10^{12}$	$f(\sigma)$	$\Theta$ (23')	$\Theta$ (Spez. W.)	$\Theta$ (25)
Al	27,1	2,71	1,36	10,2	399	396	192
Cu	63,6	8,96	0,74	10,5	329	309	159
Ag	107,9	10,53	0,92	15,4	212	215	117
Au	197,2	19,21	0,60	24,7	166	—	—
Ni	58,7	8,81	0,57	7,38	435	—	—
Fe	55,9	7,85	0,62	5,86	467	—	—
Cd	112,4	8,63	2,4	7,89	168	—	—
Sn	119,0	7,28	1,9	8,50	185	—	—
Pb	207,1	11,32	2,0	61,0	72	95	63
Bi	208,0	9,78	3,2	8,98	111	—	—
Pd	106,7	11,96	0,57	18,8	204	—	—
Pt	195,0	21,39	0,40	17,1	226	—	—

In Spalte 1 steht der Name des Metalles, Spalte 2 enthält die Atomgewichte  $M$ , Spalte 3 die Dichten  $\varrho$ , Spalte 4 und 5 bzw. die Kompressibilität  $\alpha$  und den Wert der Funktion  $f(\sigma)$  aus Gleichung (24). Die Werte für  $\alpha$  und  $\sigma$  wurden den Beobachtungen von Grüneisen entnommen.<sup>2)</sup> In Spalte 6 stehen die Werte der charakteristischen Temperatur  $\Theta$ , welche man nach unserer Formel (23') hieraus berechnen kann. Zum Vergleich sind dann in Spalte 7 diejenigen Werte von  $\Theta$  eingetragen, welche dem Verlauf der Kurven für die spezifische Wärme angepaßt sind (vgl. den vorigen § 4). Man sieht, die Übereinstimmung ist für Al und Ag sehr gut, für Cu immer noch gut. Weniger gut ist sie für Pb, der Fehler beträgt da etwa 20 Proz. Bedenkt man, daß die elastischen Konstanten und die spezifische Wärme von verschiedenen Beobachtern, also nicht am selben Metallstück gemessen wurden, daß Blei in elastischer Hinsicht weniger zuverlässig ist und gerade bei diesem Metall außerdem eine verhältnismäßig starke Veränderlichkeit des elastischen Verhaltens bei verschiedenen Temperaturen zu erwarten ist, so kann die Übereinstimmung der beiden Zahlenreihen im ganzen als gut bezeichnet werden.

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 22. p. 898. 1907; 25. p. 845. 1908.

Annalen der Physik. IV. Folge. 39.

Zur Prüfung der Einsteinschen Formel (25) dient Spalte 8. Man sieht, daß die so berechneten Werte nur ganz grob den allgemeinen Gang der  $\Theta$ -Werte angeben. Von einer numerischen Übereinstimmung ist aber nicht die Rede. Die Werte sind alle erheblich zu klein. Das kann weiter nicht befremden, da die betreffenden Einsteinschen Überlegungen ihrer ganzen Anlage nach nur die Größenordnung von  $\Theta$  liefern können, was sie immerhin so tun, daß schon nach der Einsteinschen Arbeit kein Zweifel mehr an dem Zusammenhang von  $\Theta$  mit der Kompressibilität bestehen konnte. Überdies darf man nicht vergessen, daß die der Einsteinschen Formel angepaßten Werte von  $\Theta$  nicht zusammenfallen mit denjenigen, welche für die Nernst-Lindemannsche oder für unsere Formel möglichst günstig gewählt sind.

## Teil II.

### § 6. Das elastische Problem. Grundgleichungen. Einführung von Potentialen.

Im vorhergehenden Teile haben wir unsere Entwicklungen gestützt auf das „Spektralgesetz“ eines elastischen Körpers. Bis zum § 5 benutzten wir nur den Satz, daß die Anzahl Eigenschwingungen eines solchen Körpers im Schwingungszahlenbereich  $d\nu$  der Größe  $\nu^3 d\nu$  proportional ist. Die Berechnung des Proportionalitätsfaktors dieses Gesetzes aus den elastischen Konstanten spielte erst eine Rolle im § 5, wo wir die Frage behandelten, inwieweit der Verlauf der spezifischen Wärme auf Grund von Messungen über die elastischen Konstanten vorhergesagt werden kann. Wir müssen jetzt noch den Beweis für die Richtigkeit des benutzten Verteilungsgesetzes nachliefern.

Wir wissen schon, daß für unsere Zwecke die Form des elastischen Körpers, welche wir der Rechnung zugrunde legen, keinen Einfluß auf das Schlußresultat haben kann. Tatsächlich bleibt uns keine Wahl, die Kugelform ist die einzige, für die man bisher das Problem der Lösung der elastischen Differentialgleichungen streng behandeln kann.<sup>1)</sup> Man kann

1) Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elektrizität. Übersetzung von Timpe, Leipzig 1907. p. 320 und die dort angegebene Literatur.

zwar zeigen, daß es zur Berechnung des Verteilungsgesetzes nicht nötig ist, die Randwertaufgabe in aller Strenge zu lösen, indessen wollen wir diese Möglichkeit hier nicht weiter diskutieren und müssen uns demnach an den Fall einer kugelförmigen Begrenzung des Körpers halten. Die Kugel soll uns ein Bild abgeben für einen warmen Körper im Wärmegleichgewicht, wir müssen also die Oberflächenbedingungen so wählen, daß die Kugel weder Energie abgibt, noch solche von außen bekommt. Da keine Strahlung zu berücksichtigen ist, könnten wir das erreichen, indem wir vorschreiben, daß die Oberfläche der Kugel kräftefrei ist; ebensogut aber können wir auch die Kräfte so wählen, daß keine Bewegungen der Kugeloberfläche mehr möglich sind. Dann bildet die Kugel ebenfalls ein vollständig abgeschlossenes System. Mit letzterer Bedingung, daß also die Verschiebungen an der Kugeloberfläche verschwinden, wollen wir im folgenden rechnen.

Nennen wir die Verschiebung eines Punktes im Innern der Kugel  $\mathfrak{B}$ , die beiden elastischen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , die Dichte  $\rho$  und die Zeit  $t$ , so lautet bekanntlich die elastische Differentialgleichung:

$$(26) \quad (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathfrak{B} - \mu \text{rot rot } \mathfrak{B} - \rho \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Die beiden Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  hängen bekanntlich mit den beiden praktisch gebräuchlichen: Elastizitätsmodul  $E$  und Verhältnis Querdehnung zu Längsdehnung  $\sigma$  so zusammen, daß

$$(27) \quad \lambda = E \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Wir erinnern weiter noch daran, daß aus  $\lambda$  und  $\mu$  bzw.  $E$  und  $\sigma$  die Kompressibilität  $\kappa$  berechnet werden kann nach der Formel:

$$(28) \quad \kappa = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E}. \quad 1)$$

Wir zerlegen  $\mathfrak{B}$  in einen wirbelfreien Teil  $\mathfrak{B}_1$  und einen quellenfreien Teil  $\mathfrak{B}_2$  und schreiben deshalb

$$(29) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 = \text{grad } P + \text{rot } \mathfrak{A}.$$

1) Vgl. A. E. H. Love, l. c. p. 123. Man bedenke, daß der dort definierte Kompressionsmodul  $k$  gleich dem reziproken Werte der Kompressibilität  $\kappa$  ist.

Hierbei ist also  $P$  ein skalares Potential,  $\mathfrak{A}$  ein Vektorpotential.

Mit Rücksicht auf (26) kann man nun erstens  $P$  so bestimmen, daß es der Gleichung

$$(30) \quad (\lambda + 2\mu) \Delta P - \varrho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

genügt.

Für  $\mathfrak{A}$  gilt eine ähnliche Gleichung, indessen ist es bequemer, die Substitution von  $\mathfrak{B}_2 = \text{rot } \mathfrak{A}$  in (26) nur zur Hälfte auszuführen, indem man nur in das nach der Zeit differenzierte Glied einsetzt und demnach  $\mathfrak{A}$  zu definieren durch die beiden Gleichungen

$$(31) \quad \begin{cases} -\varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = \text{rot } \mathfrak{B}_2, \\ \mathfrak{B}_2 = \text{rot } \mathfrak{A}, \end{cases}$$

Man hat so den Vorteil, daß die Gleichungen jetzt analog gebaut sind wie die Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld, deren Integration für Kugelkoordinaten ja in eine sehr bequeme Form gebracht werden kann.

Wir wollen nur zeitlich periodische Zustände untersuchen und setzen deshalb

$$(32) \quad P = \Phi e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B} e^{i\omega t}.$$

Die GröÙe  $\omega$  bedeutet dann die Schwingungszahl in  $2\pi$  sec und ist also gleich  $2\pi\nu$ .

Ebenso setzen wir

$$(33) \quad \mathfrak{B}_1 = v_1 e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{B}_2 = v_2 e^{i\omega t},$$

dann gelten zur Bestimmung von  $v_1$  die Gleichungen

$$(34) \quad \begin{cases} \Delta \Phi + \frac{\varrho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = 0, \\ v_1 = \text{grad } \Phi, \end{cases}$$

und zur Bestimmung von  $v_2$ :

$$(35) \quad \begin{cases} -\varrho \frac{\omega^2}{\mu} \mathfrak{B} = -\text{rot } v_2, \\ v_2 = \text{rot } \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (34) sind fertig zum Gebrauch; zur Verwertung von (35) aber empfiehlt sich noch eine Umformung,



wie ich sie bei der Behandlung des entsprechenden elektromagnetischen Problems benutzt habe.<sup>1)</sup> Indem man  $\mathfrak{B}$  mit der magnetischen Feldstärke  $H$ ,  $v_2$  mit der elektrischen Feldstärke  $E$  in Parallele setzt und die Konstanten

$$\frac{i\mu\omega}{c} \text{ bzw. } \left( \frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c} \right)$$

durch die Werte  $-(\rho\omega^2/\mu)$  bzw. 1 ersetzt, erhält man folgendes Resultat. Führt man Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  ein und definiert zwei skalare Größen  $\Pi$  und  $\Psi$  durch die Gleichungen:

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta \Pi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Pi = 0, \\ \Delta \Psi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Psi = 0, \end{cases}$$

so findet man zwei voneinander unabhängige die Grundgleichungen befriedigende Darstellungen für die Komponenten von  $v_2$ , indem man setzt, entweder:

$$(37) \quad \begin{cases} (v_2)_r = 0, \\ (v_2)_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \Pi, \\ (v_2)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} r \Pi, \end{cases} \quad \left( \Delta \Pi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Pi = 0 \right)$$

oder

$$(37') \quad \begin{cases} (v_2)_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Psi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} r \Psi, \\ (v_2)_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} r \Psi, \\ (v_2)_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} r \Psi. \end{cases} \quad \left( \Delta \Psi + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Psi = 0 \right)$$

Zur bequemen Übersicht sind auch die Differentialgleichungen für  $\Pi$  und  $\Psi$  wiederholt; in derselben Absicht möge auch (34), die Definition der dritten Bewegungsart, nochmals jetzt in Koordinatenform angegeben werden:

$$(38) \quad \begin{cases} (v_1)_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ (v_1)_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \\ (v_1)_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad \left( \Delta \Phi + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = 0 \right).$$

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 30. p. 61 ff. 1909.

## § 7. Die Grenzbedingungen.

Wie im vorigen § 6 auseinandergesetzt wurde, wollen wir als Grenzbedingung an der Kugeloberfläche  $r = a$  vorschreiben, daß die Verschiebung verschwindet. Mit dem aus dem Potential  $\Pi$  nach (37) zu berechnenden Werten von  $v = v_2$  ist diese Grenzbedingung ohne weiteres zu erfüllen, indem man festsetzt, daß für  $r = a$  das Potential  $\Pi$  verschwindet:

$$(39) \quad [\Pi]_{r=a} = 0.$$

Dagegen ist es unmöglich,  $\Psi$  oder  $\Phi$  so zu bestimmen, daß die Grenzbedingungen für  $v_2'$  und für  $v_1$  einzeln erfüllt sind. Das gelingt nur für die Summe  $v_2' + v_1$ . Nehmen wir also die Summation vor, so folgert man aus den zwei letzten Gleichungen von (37) und den zwei letzten von (38), daß für  $r = a$  der Ausdruck

$$\Phi + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi$$

verschwinden muß:

$$(40) \quad \left[ \Phi + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi \right]_{r=a} = 0.$$

Es ist dieses sofort ersichtlich, wenn man bedenkt, daß durch die Addition die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \Psi + \Phi \right),$$

bzw.

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \Psi + \Phi \right)$$

entstehen.

Die noch übrig gebliebenen Gleichungen für  $(v_2')_r$  und  $(v_1)_r$  liefern die zweite Grenzbedingung:

$$(40') \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Psi + \frac{\varrho \omega^2}{\mu} r \Psi \right]_{r=a} = 0.$$

Hat man  $\Pi$ ,  $\Phi$  und  $\Psi$  zunächst allgemein bestimmt und nachher die Konstanten in  $\Pi$  so bestimmt, daß (39) erfüllt ist und die in  $\Phi + \Psi$  vorkommenden, so daß (40) und (40') erfüllt sind, so findet man die möglichen Bewegungen  $v_2$  bzw.  $v_2' + v_1$  durch Anwendung des Differentiationsschemas der Gleichungen (37), (37') und (38). Für unsere Zwecke brauchen wir das indessen nicht mehr auszuführen; was wir wissen

müssen, ist nur die Lage und die Anzahl der Eigenschwingungen, welche sich schon aus (39), (40) und (40') ergeben.

§ 8. Die Darstellungen für die Potentiale und die Gleichungen für die Eigenschwingungen.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(41) \quad \alpha^2 = \frac{\varrho \omega^2}{\mu}, \quad \beta^2 = \frac{\varrho \omega^2}{\lambda + 2\mu},$$

dann gilt für  $\Pi$  die Gleichung:

$$(42) \quad \Delta \Pi + \alpha^2 \Pi = 0.$$

Eine allgemeine Lösung in Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  erhalten wir durch den Ansatz<sup>1)</sup>:

$$(43) \quad r \Pi = \sum_n A_n \psi_n(\alpha r) S_n(\vartheta, \varphi).$$

Die  $A_n$  sind willkürliche Konstanten,  $\psi_n(\alpha r)$  ist bis auf den Faktor  $(\pi \alpha r / 2)^{1/2}$  die gewöhnliche Besselsche Funktion mit dem Index  $n + \frac{1}{2}$  und dem Argument  $\alpha r$ ,  $S_n(\vartheta, \varphi)$  bedeutet die  $n^{\text{te}}$  Kugelflächenfunktion. Letztere enthält bekanntlich, wenn man eine der Konstanten mit  $A_n$  vereinigt denkt noch  $2n - 1$  beliebige Konstanten, wie übrigens am allerunmittelbarsten aus der Maxwellschen Definition folgt, nach welcher  $S_n$  definiert wird durch die Lage von den  $n$  Durchschnittspunkten von  $n$  beliebigen Achsen mit der Einheitskugel.<sup>2)</sup> Die Grenzbedingung (39) verlangt jetzt, daß  $\alpha$  so bestimmt wird, daß

$$(44) \quad \psi_n(\alpha a) = 0.$$

Hat man eine zum Index  $n$  gehörige Wurzel dieser Gleichung bestimmt, so folgt daraus nach (41) eine Eigenschwingungszahl  $\omega$ . Die zugehörige Bewegung kann noch verschiedentlich variiert werden, da das zu dieser einen Schwingungszahl gehörige Potential, wie eben auseinandergesetzt wurde, noch  $2n$  verfügbare Konstanten enthält.

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, hat nun (44) bei festgehaltenem  $n$  nicht eine, sondern unendlich viele

1) Vgl. auch für die Bezeichnung  $\psi_n$  und die zugehörigen Reihenentwickelungen P. Debye, Ann. d. Phys. 30. p. 64. 1909.

2) J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, 1. p. 179.

Wurzeln. Wir wollen den  $p^{\text{ten}}$  zum Index  $n$  gehörigen Wert von  $\alpha$ , welcher (44) befriedigt, mit  $\alpha_n^p$  bezeichnen, dann ist  $r\Pi$  darstellbar durch folgende Doppelsumme:

$$(43') \quad r\Pi = \sum_n \sum_p A_n^p \psi_n(\alpha_n^p r) S_n^p(\vartheta, \varphi),$$

in der also einmal über alle Wurzeln, welche zum Index  $n$  gehören und dann über  $n$  selbst zu summieren ist. Auch an das Zeichen  $S_n$  für die Kugelflächenfunktion haben wir noch den Index  $p$  angehängt, um anzudeuten, daß die  $2n-1$  Konstanten derselben zu jeder Kombination von  $n$  und  $p$  beliebig gewählt werden können. In (43') haben wir den allgemeinsten Ausdruck für  $\Pi$ , welcher Grundgleichungen und Grenzbedingungen befriedigt.

Es folgen jetzt die entsprechenden Überlegungen für die zweite Bewegungsart. Für  $r\Phi$  und  $r\Psi$  kann man zunächst wieder ohne Rücksicht auf die Grenzbedingungen den allgemeinen Ansatz

$$(45) \quad \begin{cases} r\Psi = \sum B_n \psi_n(\alpha r) S_n(\vartheta, \varphi), \\ r\Phi = \sum C_n \psi_n(\beta r) S_n(\vartheta, \varphi) \end{cases}$$

machen, wobei  $B_n$  und  $C_n$  beliebige Konstanten bedeuten. Unter  $S_n$  verstehen wir wieder Kugelflächenfunktionen, welche aber in beiden Summen identisch sein sollen.

Die erste Grenzbedingung (40) verlangt jetzt, daß

$$(46) \quad C_n \frac{\psi_n(\beta a)}{a} + B_n \frac{\partial}{\partial a} \psi_n(\alpha a) = 0;$$

aus der zweiten Bedingung (40') folgt, daß

$$(46') \quad C_n \frac{\partial}{\partial a} \frac{\psi_n(\beta a)}{a} + B_n \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \psi_n(\alpha a) + \alpha^2 \psi_n(\alpha a) \right\} = 0.$$

Die geschweifte Klammer können wir noch etwas vereinfachen; mit Rücksicht auf die für  $\psi_n(\alpha a)$  geltende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \psi_n(\alpha a) + \left( \alpha^2 - \frac{n(n+1)}{a^2} \right) \psi_n(\alpha a) = 0$$

folgt nämlich statt (46'):

$$(46'') \quad C_n \frac{\partial}{\partial a} \frac{\psi_n(\beta a)}{a} + B_n n(n+1) \frac{\psi_n(\alpha a)}{a^2} = 0.$$

Die beiden Gleichungen (46) und (46'') können nur dann durch endliche Werte von  $B_n$  und  $C_n$  befriedigt werden, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet. Ist das der Fall, so ist das Verhältnis von  $B_n$  zu  $C_n$  immerhin bestimmt, so daß nur eine der beiden Größen willkürlich wählbar bleibt. Die Gleichung, welche das Verschwinden der Determinante ausdrückt, kann nach leichter Umrechnung auf die Form

$$(47) \quad \frac{\psi_n'(\alpha a)}{\psi_n(\alpha a)/\alpha a} \frac{\beta a \cdot \frac{d}{d(\beta a)} \frac{\psi_n(\beta a)}{\beta a}}{\psi_n(\beta a)/\beta a} = n(n+1)$$

gebracht werden. Die wirkliche Variable dieser Gleichung ist die Schwingungszahl  $\omega$ ; wie aus (41) hervorgeht, müssen wir also, wenn wir die Variablen  $\alpha a$  und  $\beta a$  beibehalten, noch berücksichtigen, daß

$$(48) \quad \alpha a \sqrt{\mu} = \beta a \sqrt{\lambda + 2\mu}.$$

Hat man zwei Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  gefunden, welche (47) und (48) befriedigen, so folgt aus diesen wieder eine Eigenschwingungszahl  $\omega$ . Das zugehörige Potential, also auch der zugehörige Bewegungszustand enthält noch  $2n$  beliebige Konstanten, ebenso wie im Falle des Potentials  $II$ , da das Verhältnis  $B_n/C_n$ , wie oben bemerkt, bei bestimmten Werten von  $\alpha$  und  $\beta$  vollständig bestimmt ist und die Kugelflächenfunktionen in  $\Phi$  und  $\Psi$  sonst identisch sind.

#### § 9. Asymptotische Lage und Anzahl der Eigenfrequenzen.

Nachdem wir in (44) bzw. (47) und (48) die Frequenzgleichungen gefunden haben, handelt es sich zunächst um die explizite Berechnung der Wurzeln. Hierbei können wir von vornherein eine Vereinfachung eintreten lassen. Die Eigenfrequenzen, welche für die Berechnung der spezifischen Wärme in Betracht gezogen werden müssen, sind in sehr großer Zahl vorhanden. Weit aus überwiegen deshalb in ihrem Einfluß die hohen und höchsten Eigentöne, d. h. solche, welche zu großen Werten von  $n$  gehören, da ja  $n$ , wie sofort aus den Darstellungen ersichtlich ist, die Anzahl Knoten in radialer Richtung innerhalb der Kugel mißt. Wir können deshalb die Dimension unserer Formeln auf den Fall großer Werte von  $n$  beschränken, für welchen bequeme asymptotische Formeln für die  $\psi_n$  exi-

stieren. Wesentlich ist indessen, daß wir nicht auch noch von dem Argument dieser Funktionen voraussetzen, daß es selbst wieder groß im Vergleich mit  $n$  sei, das ist, wie wir sehen werden, bei unseren Wurzeln durchaus nicht der Fall. Wir müssen deshalb für unsere Funktionen nicht die Hankelschen Näherungen nehmen, welchen eben jene Voraussetzung zugrunde liegt, sondern Formeln, welche noch gestatten, daß das Argument beliebige Werte durchläuft. Für diesen Fall hat man<sup>1)</sup>:

$$(49) \quad \begin{cases} \psi_n(x) = \frac{1}{(\sin \tau)^{1/2}} \cos \left[ x(\sin \tau - \tau \cos \tau) - \frac{\pi}{4} \right], \\ \cos \tau = \frac{n + \frac{1}{2}}{x}, \end{cases}$$

solange  $x > n + \frac{1}{2}$  ist.

Ist dagegen  $x < n + \frac{1}{2}$ , so verschwindet  $\psi_n$  rein exponentiell. Wir können hieraus sofort schließen, daß die Gleichung  $\psi_n(x) = 0$  keine Wurzeln besitzt, welche kleiner sind als der untere Index  $n$ .

Unter a) behandeln wir jetzt unsere erste Frequenzgleichung (44), unter b) die zwei Gleichungen (47) und (48).

a) Die Gleichung lautet

$$(44) \quad \psi_n(\alpha a) = 0.$$

Bezeichnen wir vorübergehend  $\alpha a$  mit  $x$ , so kann dafür nach (49) auch geschrieben werden:

$$(50) \quad \begin{cases} \cos \left[ x(\sin \tau - \tau \cos \tau) - \frac{\pi}{4} \right] = 0, \\ \cos \tau = \frac{n + \frac{1}{2}}{x}, \end{cases}$$

woraus die zu einem Werte  $n$  gehörigen Wurzeln  $x$  sofort berechenbar sind. Mehr wie die genauen Werte dieser Wurzeln ist für uns die Zahl der Wurzeln wichtig, welche Anlaß gibt zu Frequenzen unterhalb einer bestimmten, sonst aber beliebig angenommenen Frequenz. Wir wollen diese feste Frequenz

1) Vgl. P. Debye, Math. Ann. 67. p. 535. 1909. Die Formeln sind auch zusammengestellt bei E. Jahnke u. F. Emde: Funktionentafeln, Leipzig 1909. p. 102. Ähnliche Rechnungen, wie die unsrigen, finden sich bei J. Reudler, Diss. Leiden 1912, in welcher das elektromagnetische Feld in einer Kugel mit Rücksicht auf die Jeanssche Ableitung des Strahlungsgesetzes untersucht wird.

definieren durch Angabe eines Grenzwertes  $x = x_0$  für unsere Wurzeln  $x = a$ . Dann lautet unsere Frage: Wieviel Wurzeln  $x$  liegen bei gegebenem  $n$  unterhalb einer bestimmten Grenze  $x = x_0$ ?

Ersetzen wir zunächst in der ersten Gleichung (50) unsere Größe  $x$  durch ihren Ausdruck in  $n$  und  $\tau$ , so bekommen wir:

$$(51) \quad \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4} \right] = 0.$$

Nach dem Obigen brauchen wir nur Fälle zu betrachten, bei denen  $x > n + \frac{1}{2}$  ist. Die Variable  $\tau$  wird also ausgehen von dem durch

$$\cos \tau = 1$$

definiertem Werte

$$(52) \quad \tau = 0.$$

Zu unserer oberen Grenze  $x = x_0$  gehört ein zweiter Wert  $\tau = \tau_0$ , bestimmt durch die Gleichung

$$(52') \quad \cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{x_0} \quad \text{oder} \quad \tau_0 = \arccos \frac{n + \frac{1}{2}}{x_0},$$

wobei  $\tau_0$  natürlich zwischen 0 und  $\pi/2$  liegt. Unsere Frage deckt sich jetzt mit der folgenden: Wieviel Wurzeln  $\tau$  der Gleichung (51) liegen in dem Gebiete zwischen  $\tau = 0$  und  $\tau = \tau_0$ ?

Geht nun  $\tau$  von 0 bis  $\tau_0$ , so läuft das Argument des  $\cos$  in (51) von

$$-\frac{\pi}{4} \quad \text{bis} \quad \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} \tau_0 - \tau_0) - \frac{\pi}{4}.$$

Wir können uns nun die Funktion

$$\left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4}$$

senkrecht zu einer  $\tau$ -Achse auftragen, wie das in Fig. 7 geschehen ist. Außerdem denken wir uns in den Höhen  $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$  usw. horizontale gerade Linien gezogen. Jeder Schnittpunkt einer solchen Geraden mit der Kurve hat dann eine Abszisse  $\tau$ , welche Wurzel unserer vorgelegten Gleichung ist.

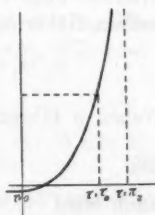


Fig. 7.



Die Gesamthöhe, welche wir zu durchlaufen haben, beträgt

$$(n + \frac{1}{2})(\operatorname{tg} \tau_0 - \tau_0) - \frac{\pi}{4},$$

die Ordinaten aufeinanderfolgender horizontaler Geraden unterscheiden sich je um  $\pi$ , so daß die gesuchte Anzahl Wurzeln, welche zum Index  $n$  gehören und die wir mit  $z_n$  bezeichnen, sich ergibt zu

$$(53) \quad z_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{\pi} (\operatorname{tg} \tau_0 - \tau_0).$$

Substituieren wir für  $n + \frac{1}{2}$  seinen Ausdruck in  $\tau_0$ , so können wir statt dessen auch schreiben

$$(53') \quad z_n = \frac{x_0}{\pi} (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0),$$

als Ausdruck für die Anzahl Eigenfrequenzen, welche bei gegebenem  $n$  unterhalb einer bestimmten Grenze  $x_0$  liegen.

b) Wir behandeln jetzt die gleiche Frage für unsere beiden Gleichungen (47) und (48).

Bezeichnen wir wie oben  $\alpha a$  mit  $x$  und außerdem  $\beta a$  mit  $y$ , so lautet (47):

$$(54) \quad \frac{\psi_n'(x)}{\psi_n(x)/x} \frac{y}{d y} \frac{\psi_n(y)}{y} = n(n+1).$$

Nach (49) ist, wenn wieder

$$\cos \tau = \frac{n + \frac{1}{2}}{x}$$

gesetzt wird:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sin^{1/2} \tau} \cos \left[ (n + \frac{1}{2})(\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Hieraus folgt man leicht durch Differentiation, daß in derselben Näherung:

$$\psi_n'(x) = -\sin^{1/2} \tau \sin \left[ (n + \frac{1}{2})(\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Neben  $y$  führen wir jetzt einen Winkel  $t$  ein, so daß

$$(55) \quad \cos t = \frac{n + \frac{1}{2}}{y},$$

dann wird

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\sin^{1/2} t} \cos \left[ (n + \frac{1}{2})(\operatorname{tg} t - t) - \frac{\pi}{4} \right]$$

und durch Ausführung der Differentiation:

$$y \frac{d}{dy} \frac{\psi_n(y)}{y} = -\sin^{1/2} t \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} t - t) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung (54) ein, so erhalten wir zwischen  $\tau$  und  $t$  die Beziehung:

$$(56) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4} \right] \operatorname{tg} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg} t - t) - \frac{\pi}{4} \right] \\ = \frac{n(n+1)}{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} t}. \end{cases}$$

Wir wollen noch die beiden eckigen Klammern kurz mit  $[\tau]$  und  $[t]$  bezeichnen, beachten wir dann, daß für größere Werte von  $n$

$$\frac{n(n+1)}{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2} = 1$$

gesetzt werden kann, so lautet die Gleichung schließlich:

$$(56') \quad \operatorname{tg} [\tau] \operatorname{tg} [t] = \frac{1}{\operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} t}.$$

Neben dieser Gleichung müssen wir noch berücksichtigen, daß nach (48)

$$\alpha a \sqrt{\mu} = \beta a \sqrt{\lambda + 2\mu}$$

oder in  $\tau$  und  $t$  ausgedrückt:

$$(57) \quad \sqrt{\mu} \cos t = \sqrt{\lambda + 2\mu} \cos \tau.$$

Hat man zwei Werte von  $\tau$  und  $t$  gefunden, welche (56') und (57) zugleich befriedigen, so kann man damit eine Eigenfrequenz definieren.

Ebenso wie unter a) interessiert uns jetzt nicht die genaue Lage der Wurzeln, sondern nur die Anzahl, welche unterhalb einer durch eine willkürlich festzusetzende Eigenfrequenz bestimmten Grenze liegen. Die Grenze für  $x$  sei mit  $x_0$  bezeichnet, die für  $y$  mit  $y_0$ , wobei natürlich nach (57) bzw. (48) stets

$$x_0 \sqrt{\mu} = y_0 \sqrt{\lambda + 2\mu}$$

sein muß. Zu diesen Werten  $x_0$  und  $y_0$  mögen die Werte  $\tau_0$  und  $t_0$  gehören, dann ist also unsere Frage:

Wieviele Werte von  $\tau$  bzw.  $t$  gibt es, welche (56') und (57) befriedigen und für welche  $\tau$  zwischen 0 und  $\tau_0$  und  $t$  zugleich zwischen 0 und  $t_0$  liegt?

In einer Figur tragen wir längs der horizontalen Achse die Werte  $[\tau]$  und längs der vertikalen Achse die Werte  $[\ell]$  auf; senkrecht dieser  $[\tau]$ ,  $[\ell]$ -Ebene seien die Werte von

$$\operatorname{tg} [\tau] \cdot \operatorname{tg} [\ell]$$

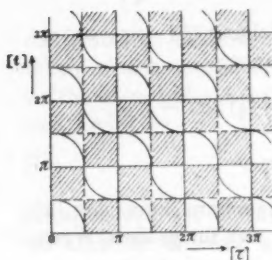


Fig. 8.

als Ordinaten einer Fläche aufgetragen. Wir wissen dann von dieser Fläche, daß sie unsere Ebene schneidet in den in der Fig. 8 ausgezogenen vertikalen und horizontal geraden Linien, welche theils durch die Abszissen  $0, \pi, 2\pi, 3\pi$  usw., theils durch die Ordinaten  $0, \pi, 2\pi, 3\pi$  hindurchgehen.

Ein gleiches Gitter von gestrichelten Geraden, aus dem vorigen durch eine Horizontalverschiebung um  $\pi/2$  und eine Vertikalverschiebung um gleichviel entstanden, soll andeuten, über welche Punkte unserer Ebene die Fläche unendlich große Ordinaten hat. Die Ordinaten  $\operatorname{tg} [\tau]$ ,  $\operatorname{tg} [\ell]$  sind nun abwechselnd positiv und negativ. Um auch das zu veranschaulichen, haben wir diejenigen Vierecke, für welche die Fläche negative Ordinaten hat, schraffiert. So entstand die schachbrettartige Fig. 8; in jedem nicht schraffierten Viereck nehmen die Ordinaten alle positive Werte zwischen  $0$  und  $\infty$  an und zwar so, daß die Nullwerte auf der ausgezogenen und die Werte  $\infty$  oberhalb der gestrichelten Begrenzung liegen.

Das rechte Glied unserer Gleichung (56')·

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} t}$$

hat im ganzen zu untersuchenden Gebiet stets positive Werte, da sowohl  $\tau$  wie  $t < \pi/2$  ist. Durch die Gleichung (56') selbst wird jetzt in der  $[\tau]$ ,  $[\ell]$ -Ebene eine Reihe von Kurven definiert, welche sich, da das rechte Glied positiv ist, durch die unschraffierten Felder hindurchziehen und (schematisch) in Fig. 8 angegeben sind. Befinden wir uns also auf einer dieser Kurven, so ist die erste Gleichung (56') erfüllt.

Außer Gleichung (56') müssen wir auch noch Gleichung (57) erfüllen. Wir wollen die Gesamtheit von Punkten, welche

letzterer Gleichung genügen, ebenfalls durch eine Kurve in der  $[\tau]$ ,  $[t]$ -Ebene verbinden. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit den der früheren Gleichung (56') darstellenden Kurven geben dann diejenigen Werte von  $[\tau]$  und  $[t]$  an, welche (56') und (57) zugleich befriedigen und also zu einer Eigenfrequenz gehören.

Wenn  $\tau = 0$  ist, haben wir  $[\tau] = -\pi/4$ , ebenso gehört zu  $t = 0$  der Wert  $[t] = -\pi/4$ . Da aber in  $[\tau]$  die Größe  $(\operatorname{tg} \tau - \tau)$  mit dem sehr großen Werte  $(n + \frac{1}{2})$  multipliziert ist, so gehört zu  $[\tau] = 0$  ein äußerst kleiner Wert von  $\tau$ . Dasselbe gilt für  $[t]$  und  $t$ , so daß wir ohne merklichen Fehler  $\tau = 0$  und  $[\tau] = 0$  bzw.  $t = 0$  und  $[t] = 0$  als zusammengehörig betrachten können. Nach (57) gehört nun zu  $t = 0$  ein Wert von  $\tau$ , den wir mit  $\tau_1$  bezeichnen wollen, definiert durch die Beziehung

$$\cos \tau_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}.$$

Wenn also  $t$  und damit auch  $[t] = 0$  ist, so hat  $[\tau]$  den endlichen Wert  $[\tau_1]$ . Mit kleineren Werten von  $\tau$  zu rechnen hat, solange wir (49) als Näherung benutzen, keinen Sinn, da für  $\tau$  und  $t$  vorausgesetzt ist, daß sie reell sind; wir haben ja für die Ableitung von (49) ausdrücklich angenommen, daß in den beiden  $\psi$ -Funktionen das Argument größer als der Index sei, was sich mit der Annahme:  $\tau$  und  $t$  beide reell, der Definition dieser Größen nach, deckt.

Um den Verlauf der durch (57) definierten Kurve in der  $[\tau]$ ,  $[t]$ -Ebene zu veranschaulichen, geben wir die zweite Fig. 9.

Die Kurve fängt, wie eben auseinandergesetzt wurde, an in einem Punkte A mit den Koordinaten 0 und  $[\tau_1]$  und endet in einem Punkte B mit den Koordinaten  $[\tau_0]$  und  $[t_0]$ . Wir konnten diese Kurve nicht mehr in Fig. 8 eintragen, da die Werte dieser Koordinaten sehr groß sind, wegen des vorausgesetzten großen Wertes von  $n$ . Überträgt man also umgekehrt die Schachbrettstruktur von Fig. 8 in Fig. 9, so muß

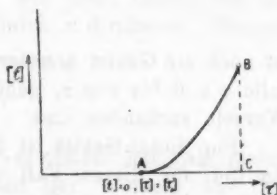


Fig. 9.

man bei dem zuletzt benutzten Maßstab die Dimensionen der Felder äußerst klein wählen. Wir wollen uns diese Übertragung ausgeführt und auch die Kurven der Fig. 8 mit eingezeichnet denken. Dann ist die gesuchte Anzahl Wurzeln gleich der Anzahl Schnittpunkte der Kurve  $AB$  mit den sich durch die unschraffierten Felder von oben nach unten hindurchziehenden Kurven der Fig. 8. Da nun die doppelte Breite eines Feldes unseres Schachbrettes  $\pi$  ist, so sieht man sofort, daß man die gesuchte Zahl bekommt, indem man die Längen  $AC$  und  $CB$  der Fig. 9 addiert und durch  $\pi$  dividiert. Wir nennen noch diese zum Index  $n$  gehörige Zahl der Wurzeln  $z'_n$ , dann ist also

$$(58) \quad z'_n = \frac{AC + CB}{\pi} = \frac{[t_0] + [t_1] - [t_1]}{\pi}.$$

Indessen diese Zahl  $z'_n$  entspricht zwar der Zahl der Wurzeln, welche zu unserer Näherungsgleichung (56') gehören, aber nicht der Zahl der Wurzeln, welche aus der ursprünglich vorgelegten Gleichung berechenbar sind. Wir wissen nämlich, daß unsere Funktionen  $\psi_n$  dann exponentiell (ohne Schwan- kungen) verschwinden, wenn das Argument kleiner wie der Index ist. Das ganze übrige Gebiet haben wir nun wohl für den einen Faktor aber

$$\frac{y \frac{d}{dy} \frac{\psi_n(y)}{y}}{\psi_n(y)/y}$$

von (54) untersucht, da wir  $t$  von 0 an zählen konnten. Für den anderen Faktor

$$\frac{\psi'_n(x)}{\psi_n(x)}$$

ist noch ein Gebiet ununtersucht geblieben, was zu dem Intervalle  $\tau = 0$  bis  $\tau = \tau_1$  gehört, und in dem tatsächlich noch Wurzeln vorhanden sind.

Für dieses Gebiet ist  $y < n$ , dagegen  $x$  immer noch  $> n$ . Um (54) für diesen Fall durch eine Näherungsgleichung zu ersetzen, können wir für  $\psi'_n(x)$  unsere frühere Darstellung

$$(49) \quad \begin{cases} \psi_n(x) = \frac{1}{\sin^{1/2} \tau} \cos \left[ (n + \frac{1}{2})(\tau - \tau_1) - \frac{\pi}{4} \right], \\ \cos \tau = \frac{n + \frac{1}{2}}{x} \end{cases}$$

beibehalten. Wegen  $y < n$  gilt aber für  $\psi_n(y)$  jetzt die Darstellung: <sup>1)</sup>

$$(59) \quad \begin{cases} \psi_n(y) = \frac{1}{\sin^{1/2} t} e^{-(n+1/2)(\mathfrak{Z}_g t - t)}, \\ \cos t = \frac{n+1/2}{y}, \end{cases}$$

in der  $\cos$  und  $\mathfrak{Z}_g$  die hyperbolischen Funktionen bedeuten und  $t$  positiv ist.

Hieraus findet man leicht durch Differentiation, daß:

$$\frac{y \frac{d}{dy} \frac{\psi_n(y)}{y}}{\psi_n(y)/y} = -(n + \frac{1}{2}) \mathfrak{Z}_g t$$

und schließlich, daß unsere Gleichung (54) die Form annimmt:

$$(60) \quad \operatorname{tg} \left[ (n + \frac{1}{2})(\operatorname{tg} \tau - \tau) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{n(n+1)}{(n + \frac{1}{2})^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \tau \mathfrak{Z}_g t}.$$

Schreiben wir wieder wie früher für die eckige Klammer einfach  $[\tau]$  und ersetzen  $\frac{n(n+1)}{(n + \frac{1}{2})^2}$  durch 1, so haben wir als Frequenzgleichung:

$$(60') \quad \operatorname{tg} [\tau] = \frac{1}{\operatorname{tg} \tau \mathfrak{Z}_g t},$$

bei der  $\tau$  alle Werte von  $\tau = 0$  bis  $\tau = \tau_1$  zu durchlaufen hat.

In jedem Intervalle von der Größe  $\pi$  durchläuft  $\operatorname{tg} [\tau]$  alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , die Funktion hat in einem solchen Intervalle also sicher einmal und nur einmal den durch die rechte Seite vorgeschriebenen Wert. Die Anzahl Wurzeln, welche zu (60') gehört, bekommen wir also, indem wir die Länge des Wertebereiches für  $[\tau]$  durch  $\pi$  dividieren. Nennen wir die Zahl  $z_n''$ , so ist demnach

$$(61) \quad z_n'' = \frac{[\tau_1]}{\pi}.$$

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und wir finden für den Zustand b) die Gesamtzahl der Wurzeln aus (58) und (61) gleich

$$(62) \quad z_n' + z_n'' = \frac{[\tau_0] + [\tau_1]}{\pi}.$$

1) Vgl. P. Debye, Math. Ann.; l. c.

Zusammenstellung der Resultate dieses Paragraphen.

Betrachten wir einen Schwingungszustand, der in bezug auf seine Abhängigkeit der Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  durch eine Kugelflächenfunktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $S_n(\vartheta, \varphi)$  gemessen wird, so gehören zu diesem Zustande zwei Sorten von Bewegung a) und b).

Legen wir weiter eine obere Grenze für die Schwingungszahl, z. B.  $\omega_0$ , fest und definieren dann mittels dieser Grenzzahl  $\omega_0$  zwei Winkel  $\tau_0$  und  $t_0$  durch die Gleichungen

$$(63) \quad \begin{cases} \cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{x_0} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\alpha_0 a} = \frac{n + \frac{1}{2}}{a \omega_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}, \\ \cos t_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{y_0} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\beta_0 a} = \frac{n + \frac{1}{2}}{a \omega_0} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varphi}}, \end{cases}$$

wobei vorauszusetzen ist, daß  $\omega_0$  so groß ist, daß die Winkel  $\tau_0$  und  $t_0$  reell sind. Sie sollen außerdem im Intervalle 0 bis  $\pi/2$  angenommen werden.

Dann ergibt sich die Anzahl Eigenfrequenzen des Zustandes a) zu

$$(64) \quad z_n = \frac{[\tau_0]}{\pi},$$

die des Zustandes b) zu

$$(64') \quad z_n' + z_n'' = \frac{[t_0] + [\tau_0]}{\pi},$$

wobei  $[\tau_0]$  eine Abkürzung ist für

$$(65) \quad [\tau_0] = (n + \frac{1}{2})(\text{tg } \tau_0 - \tau_0) - \frac{\pi}{4},$$

wofür wegen der Größe von  $n$  auch gleich gut

$$(65') \quad [\tau_0] = (n + \frac{1}{2})(\text{tg } \tau_0 - \tau_0)$$

geschrieben werden kann. Die Größe  $[t_0]$  schließlich ist entsprechend definiert.

#### § 10. Anzahl Freiheitsgrade, welche einem Schwingungszahlenintervall $d\nu$ angehören.

Wir legen eine Grenze  $\nu_0$  für die zu untersuchenden Schwingungszahlen fest, so daß also

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0$$

und beantworten dann zunächst die Frage: Wie groß ist die Anzahl Konstanten, welche man angeben muß, um einen beliebigen Schwingungszustand unserer Kugel vollständig zu



definieren, bei dem die Frequenzen der einzelnen Schwingungen aber die Grenze  $\nu_0$  nicht überschreiten?

Die Hälfte dieser Zahl können wir die Anzahl Freiheitsgrade  $Z$  der Kugel unterhalb der Schwingungszahl  $\nu_0$  nennen. Ein einfacher linearer Dipol wäre bei dieser Nomenklatur ein System von einem Freiheitsgrad.

Die Bewegungszustände a) und b) betrachten wir wieder jeden für sich und nennen die zugehörigen Zahlen  $Z$  bzw.  $Z_a$  und  $Z_b$ .

a) Oben fanden wir (Gl. (64)), daß zu einem Reihengliede

$$z_n = \frac{[\tau_0]}{\pi}$$

Eigenfrequenzen gehören. Jedes Glied aber enthält, wenn einmal die Eigenfrequenz festgelegt ist, noch  $2n$  beliebige Konstanten. Im ganzen gehören also zur vollständigen Definition eines durch  $S_n(\vartheta, \varphi)$  gemessenen Zustandes

$$(66) \quad 2n z_n = \frac{2n}{\pi} [\tau_0]$$

Konstanten; indessen nur insofern, als das Potential  $\cos \omega t$  proportional gesetzt werden kann. Damit hätten wir aber die Phasen der Bewegungen willkürlich festgelegt. Machen wir das nicht, so müßten wir noch ein ähnliches  $\sin \omega t$  proportionales Potential addieren, wodurch die Anzahl Konstanten doppelt so groß wird. Bei unserer Definition eines Freiheitsgrades gibt also (66) direkt die Zahl derselben an, soweit sie „zu einer Kugelflächenfunktion  $S_n(\vartheta, \varphi)$  gehören“.

Die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade des Zustandes a) wird demnach

$$(67) \quad Z_a = \sum 2n z_n = \sum \frac{2n}{\pi} [\tau_0].$$

Die Summe erstreckt sich über alle Werte von  $n$ , für welche  $\tau_0$  dem Gebiete  $0 < \tau_0 < \pi/2$  angehört. Nach (63) ist

$$\cos \tau_0 = \frac{n + \frac{1}{2}}{a \omega_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} = \frac{n + \frac{1}{2}}{2\pi a \nu_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

oder auch, da  $n$  groß ist,

$$(68) \quad \cos \tau_0 = \frac{n}{2\pi a \nu_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

d. h.

$$(68'') \quad n = 2\pi a \nu_0 \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \cos \tau_0.$$

Mit diesem Werte für  $n$  wird  $Z_a$  gleich:

$$(67') \quad Z_a = 4a \nu_0 \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \sum \cos \tau_0 \cdot [\tau_0].$$

Andererseits ist

$$[\tau_0] = (n + \frac{1}{2})(\text{tg } \tau_0 - \tau_0).$$

Ersetzen wir wieder  $n + \frac{1}{2}$  durch  $n$  und  $n$  durch seinen Ausdruck in  $\tau_0$ , so wird

$$(67'') \quad Z_a = 8\pi a^2 \nu_0^2 \frac{\varrho}{\mu} \sum \cos^2 \tau_0 (\text{tg } \tau_0 - \tau_0).$$

Die Summe ist so zu verstehen, daß in ihr sukzessive die Werte von  $\tau_0$  zu substituieren sind, welche zu Werten von  $n$  gehören, die jedesmal um 1 zunehmen. Beim Übergang von einem Reihengliede zum nächsten ändert sich  $\tau_0$  äußerst wenig. Wir können deshalb für das jeweilige Intervall in  $n$  von der Größe 1 nach (68) auch schreiben:

$$1 = \Delta n = -2\pi a \nu_0 \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \sin \tau_0 \Delta \tau_0$$

und durch Einsetzung dieses Wertes unsere Summe in ein Integral verwandeln. So erhalten wir:

$$(69) \quad Z_a = -16\pi^2 a^3 \nu_0^3 \left(\frac{\varrho}{\mu}\right)^{3/4} \int_{\pi/2}^0 \sin \tau_0 \cos^2 \tau_0 (\text{tg } \tau_0 - \tau_0) d\tau_0.$$

Die untere Grenze des Integrals gehört zu  $n = 0$ , so daß für dieselbe  $\cos \tau_0 = 0$ , also  $\tau_0 = \pi/2$  ist; die obere Grenze entspricht dem anderen Ende des Intervalls für das

$$\frac{n}{2\pi a \nu_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

den Wert 1 hat.

Das Integral ist leicht auswertbar; man findet

$$\int_0^{\pi/2} \sin \tau_0 \cos^2 \tau_0 (\text{tg } \tau_0 - \tau_0) d\tau_0 = \frac{1}{9}$$

und damit schließlich

$$(70) \quad Z_a = \frac{16\pi^2}{9} a^3 \nu_0^3 \left(\frac{\varrho}{\mu}\right)^{3/4}.$$

Das Volumen der Kugel ist  $\frac{4}{3} \pi a^3$ , wir wollen dasselbe  $V$  nennen und erhalten dann:

$$(70') \quad Z_a = \frac{4\pi}{3} V \nu_0^3 \left( \frac{\varrho}{\mu} \right)^{3/2},$$

d. h., die Anzahl Freiheitsgrade ist proportional dem Volumen der Kugel und proportional der dritten Potenz der festgesetzten Maximalschwingungszahl  $\nu_0$ .

b) Ebenso wie oben gehören zu einer Kugelflächenfunktion  $S_n(\vartheta, \varphi)$  nach (64):

$$2n(z_n' + z_n'') = \frac{2n}{\pi} ([t_0] + [\tau_0])$$

Freiheitsgrade. Die Gesamtzahl derselben ist demnach

$$(71) \quad Z_b = \sum \frac{2n}{\pi} ([t_0] + [\tau_0]) = \sum \frac{2n}{\pi} [t_0] + \sum \frac{2n}{\pi} [\tau_0].$$

Die zweite Summe wurde oben schon berechnet; wir fanden

$$(72) \quad \sum \frac{2n}{\pi} [t_0] = Z_a = \frac{4\pi}{3} V \nu_0^3 \left( \frac{\varrho}{\mu} \right)^{3/2}.$$

Die erste Summe läßt sich genau so berechnen und ergibt

$$(73) \quad \sum \frac{2n}{\pi} [\tau_0] = \frac{4\pi}{3} V \nu_0^3 \left( \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} \right)^{3/2},$$

denn der einzige Unterschied gegen früher ist der, daß  $\mu$  durch  $\lambda + 2\mu$  ersetzt ist.

Durch Addition von (70'), (72) und (73) erhalten wir also unser Schlußresultat:

*Die Anzahl Freiheitsgrade eines elastischen Körpers vom Volumen  $V$ , dessen Eigenschaften durch zwei elastische Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  charakterisiert werden können, ist*

$$(74) \quad Z = \frac{4\pi}{3} V \nu^3 \left[ 2 \left( \frac{\varrho}{\mu} \right)^{3/2} + \left( \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} \right)^{3/2} \right],$$

*sofern wir nur solche Eigenschwingungen in Betracht ziehen, deren Frequenz kleiner ist, als eine beliebig festzusetzende Zahl  $\nu$ .*

Um einen direkten Anschluß an die Formeln des ersten Teiles zu erhalten, können wir noch  $\lambda$  und  $\mu$  durch die praktisch gebräuchlicheren Konstanten: Kompressibilität  $\kappa$  und Verhältnis Querdehnung zu Längsdehnung  $\sigma$  ersetzen.

Anf p. 819 stellten wir fest, daß, wenn  $E$  der Elastizitätsmodul ist,

$$\lambda = E \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

wird, während

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E}.$$

Wir können also schreiben

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} \frac{3\sigma}{1 + \sigma}, \quad \mu = \frac{1}{\kappa} \frac{3(1 - 2\sigma)}{2(1 + \sigma)}$$

und

$$\lambda + 2\mu = \frac{1}{\kappa} \frac{3(1 - \sigma)}{1 + \sigma}.$$

Nach Einsetzen dieser Werte in (74) bekommen wir:

$$(74') \quad Z = \frac{4\pi}{3} V \rho^{1/3} \kappa^{3/2} \left[ 2 \left( \frac{2(1 + \sigma)}{3(1 - 2\sigma)} \right)^{3/2} + \left( \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} \right)^{3/2} \right]$$

und das ist das in Teil I benutzte Resultat. Die eckige Klammer wurde früher noch abkürzend mit  $f(\sigma)$  bezeichnet.

#### Zusammenfassung.

1. Bei einem festen Körper besteht keine einfache Schwingungszahl des Atoms, wie sie ursprünglich von Einstein zur Berechnung der spezifischen Wärme supponiert wurde. Der Körper ist vielmehr erst zu charakterisieren durch ein ganzes Spektrum von Eigenschwingungen.

2. Das Spektrum besteht aus einer *endlichen* Anzahl von Linien (gleich dreimal der Atomzahl). Die Linien kleinster Schwingungszahl sind die gewöhnlichen akustischen Schwingungen.

3. Das Spektrum kann in seinem Verlauf charakterisiert werden durch die Dichte der Spektrallinien pro Schwingungszahlenbereich  $d\nu$  gerechnet. Wir finden, daß dieselbe  $\nu^3 d\nu$  proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist aus den elastischen Konstanten des Materials berechenbar.

4. Unter Benutzung von 3. kann man eine Formel für den Energieinhalt und für die spezifische Wärme ableiten, wenn man im Sinne der Quantentheorie jedem Freiheitsgrad die Energie

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

zuschreibt.

5. Durch dieses Verfahren bekommt man für die spezifische Wärme einatomiger Körper einen Ausdruck, welcher nur vom Verhältnis  $\Theta/T$  abhängt, wobei  $\Theta$  eine für den betreffenden Körper charakteristische Temperatur bedeutet. Die spezifische Wärme einatomiger Körper ist mithin eine *universelle* Funktion des Verhältnisses  $\Theta/T$ .

6. Für tiefe Temperaturen schließt man aus der erhaltenen Formel (oder auch direkt aus 3.), daß die spezifische Wärme für *alle* Körper proportional  $T^3$  ist. Der Energieinhalt ist dann proportional  $T^4$ , wie das nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz auch für die Strahlung, aber dann für alle Temperaturen zutrifft. Das Grenzesetz veranschaulicht besonders deutlich den Unterschied zwischen unserer Formel und der Einsteinschen bzw. Nernst-Lindemannschen. Die beiden letzteren verlangen bei tiefen Temperaturen ein exponentielles Verschwinden der spezifischen Wärme.

7. Der Vergleich unserer Formel mit den Betrachtungen an Diamant, Aluminium, Kupfer, Silber und Blei zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie.

8. Die von Nernst-Lindemann vorgeschlagene Funktion kann in gewissem Sinne (vgl. § 3) als Näherung für unsere Funktion aufgefaßt werden. Dadurch erklärt sich, weshalb auch bei dieser Formel im bisher untersuchten Temperaturbereich die Übereinstimmung mit der Erfahrung eine so gute ist.

9. Die charakteristische Temperatur  $\Theta$  kann mit recht gutem Erfolge aus den elastischen Konstanten berechnet werden. Die betreffende Formel enthält außer der Kompressibilität noch das Verhältnis Querdehnung zu Längsdehnung und unterscheidet sich sowohl dadurch, wie durch einen anderen Zahlenfaktor von der früher von Einstein gegebenen.

Zürich, 15. Juli 1912.

(Eingegangen 24. Juli 1912.)

#### 4. Über die magnetische Fernwirkung rotierender Körper; von Peter Lebedew. †

§ 1. Hale<sup>1)</sup> hat die Entdeckung gemacht, daß die Fraunhoferschen Linien im Spektrum der Sonnenflecken das Zeemansche Phänomen aufweisen, und daß das Vorzeichen ihrer optischen Polarisation mit der Rotationsrichtung der um den Sonnenfleck wirbelnden Photosphäre so zusammenhängt, als trage diese letztere einen Überschuß negativer elektrischer Ladungen mit sich.

Bemerkenswert ist es, daß das magnetische Feld der Erde in bezug auf die Rotationsrichtung des Erdballes dasselbe Vorzeichen besitzt wie das magnetische Feld der Wirbel auf der Sonnenoberfläche.

§ 2. Die Entstehung der magnetischen Felder der Erde und der wirbelnden Photosphäre ist wohl in erster Linie durch die *Rotation* der Materie bedingt. Die überwiegende Wirkung der negativen elektrischen Ladungen kann man dadurch erklären, daß man entweder einen Überschuß der freien negativen Volumladung der Materie annimmt, oder daß man mit Sutherland<sup>2)</sup> die Annahme macht: es fallen die Schwerpunkte der positiven und der negativen Ladungen in jedem Atome der Materie nicht zusammen, und es beschreiben die negativen Ladungen größere Kreisbahnen als die positiven.

Nach Sutherland soll die gegenseitige Verschiebung der Ladungen in der Erde aus einer nicht näher bezeichneten Ursache mit der Richtung der Gravitationskräfte zusammenfallen. Diese Annahme genügt für die Erklärung des Erdfeldes, sie führt aber auf Schwierigkeiten bei der Behandlung des magnetischen Feldes der Sonnenflecke und ist einer direkten experimentellen Prüfung nicht zugänglich.

1) G. E. Hale, *Astrophys. Journ.* 28. p. 317. 1908.

2) W. Sutherland, *Journ. Terrestr. Magn. and Atm. El.* 8. p. 49. 1908; 9. p. 167. 1904.

§ 3. Im Gegensatz zu Sutherland habe ich, auf der Annahme von J. J. Thomson fußend, daß die negativen Elektronen sich im positiven Atomreste frei verschieben können, die Voraussetzung gemacht, daß im Falle, wenn positive Atomreste unter Einwirkung äußerer Kräfte Kreisbahnen beschreiben, ihre negativen Elektronen unter dem Einfluß der *Zentrifugalbeschleunigung* sich im Innern der Atome in der Radialrichtung verschieben und daher größere Bahnen beschreiben als die positiven Atomreste.

Aus dieser Voraussetzung läßt sich die Entstehung der magnetischen Felder der Erde und der Sonnenflecken ungezwungen erklären; überdies läßt sich diese Voraussetzung durch direkte magnetometrische Untersuchungen rotierender Körper prüfen. Die Überlegungen, welche zu solchen Versuchen führen, und die Versuchsanordnung sind im folgenden kurz beschrieben. Die geplante Untersuchung wurde leider durch äußere Umstände unterbrochen und blieb auf orientierende Vorversuche beschränkt.

#### I. Zur Theorie.

§ 4. Bezeichnen wir mit  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit und mit  $R$  den Halbmesser der Kreisbahn, welche ein positiver Atomrest beschreibt, und machen wir die grundlegende Annahme, daß die radiale Verschiebung  $\varrho$  der negativen Ladung in bezug auf den positiven Atomrest *der Zentrifugalbeschleunigung direkt proportional ist*, so wird

$$(1) \quad \varrho = k \omega^2 R,$$

wo  $k$  eine für die betreffende Atomgattung charakteristische Konstante ist.

Rotiert ein materieller Elementarring, dessen Querschnitt  $dq$  ist, um die Achse  $AA$ , so können die beiden gleichgroßen Ladungen in zwei Elementarringe zusammengefaßt werden, deren Radien  $R$  und  $R(1 + k\omega^2)$  sind. Die magnetische Fernwirkung dieser beiden Ringe ist derjenigen äquivalent, welche zwei konzentrische Kreisringe ausüben, deren Radien  $R$  und  $R(1 + k\omega^2)$  sind, und in denen in entgegengesetzten Richtungen gleichstarke elektrische Ströme fließen.

Bezeichnen wir die Elektrizitätsmengen, welche durch die Zentrifugalbeschleunigung getrennt werden, mit  $+e$  und  $-e$



pro Volumeinheit, und mit  $v$  die Lineargeschwindigkeit der Atome ( $v = \omega R$ ), so sind die äquivalenten Stromstärken

$$(2) \quad dJ = \pm e v dq = \pm e \omega R dq.$$

Die magnetische Fernwirkung  $dH$  dieses Ringes ist mit derjenigen eines magnetischen ringförmigen Blattes zu vergleichen, ist also seiner Fläche direkt proportional und ist für einen gegebenen Punkt des Raumes:

$$(3) \quad dH = C R q dJ = C k e \omega^3 R^3 dq = C k e v^3 dq,$$

worin  $C$  eine Konstante bedeutet, welche für den betreffenden Punkt des Raumes gilt, und das Produkt  $k e$  das Material des rotierenden Ringes charakterisiert.

Aus (3) folgt nach dem Ähnlichkeitstheorem von Lord Kelvin, daß, wenn auf zwei ähnlichen rotierenden Körpern aus demselben Material zwei entsprechende Punkte mit gleicher Lineargeschwindigkeit rotieren, die magnetischen Felder in zwei korrespondierenden Punkten des Raumes gleich stark sind und mit der dritten Potenz dieser Geschwindigkeit wachsen.

§ 5. Diese letztere Folgerung gestattet, eine kleine Überschlagsrechnung zu machen: lassen wir eine Kugel von 6 cm Durchmesser etwa 500 Umdrehungen pro Sekunde machen, so erhalten wir eine Äquatorialgeschwindigkeit von ca. 94 m pro Sek.; bestände die Kugel aus demselben Material wie unser Erdball, so müßten die magnetischen Feldstärken in korrespondierenden Punkten an der Oberfläche der Kugel etwa  $(94 : 450)^3 = 0,009$ , d. h. etwa den hundertsten Teil des Erdfeldes betragen (da die Äquatorialgeschwindigkeit des Erdballes ca. 450 m pro Sek. beträgt), und ein solcher Betrag der magnetischen Kraft ist magnetometrisch noch gut meßbar.

§ 6. Die gemachte Überschlagsrechnung gilt nur, solange die Voraussetzung erfüllt ist, daß  $k$  eine Konstante ist: wenn wir aber berücksichtigen, daß die Zentrifugalbeschleunigung und demnach die Verschiebung der Ladungen am Äquator der mit 500 Touren pro Sekunde rotierenden Kugel etwa zehn Millionen mal größer ist, als am Äquator der Erde, so ist es nicht ausgeschlossen, daß eine so gewaltige Extrapolation überhaupt nicht zulässig ist und die um die rotierende Kugel auftretenden magnetischen Kräfte *sehr viel kleiner* ausfallen werden, als sie die gemachte Überschlagsrechnung ergibt.

## II. Das Strömmodell.

§ 7. Einfacher als an rotierenden Kugeln gestaltet sich die Untersuchung an einem rotierenden Zylinderring (Fig. 1), dessen magnetische Fernwirkung wir zurückführen können:

a) auf die Fernwirkung der freien (-) Ladung auf der äußeren Zylinderfläche, welche die Schichtdicke  $\rho_2$  ausfüllt (vgl. Gleichung (1)) und der Stromstärke  $J_{R_2}$  äquivalent ist, wobei:

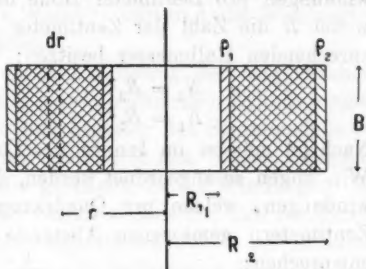


Fig. 1.

$$(4) \quad J_{R_2} = -e \rho_2 B v_{R_2} = -e k \omega^3 R_2^2 B;$$

b) auf die Fernwirkung der freien (+) Ladung auf der inneren Zylinderfläche, welche die Schichtdicke  $\rho_1$  hat und der Stromstärke  $J_{R_1}$  äquivalent ist, wo:

$$(5) \quad J_{R_1} = +e k \omega^3 R_1^2 B;$$

c) auf die Fernwirkung der mittleren Teile des Ringes, wo sich die (-) und (+) Ladungen übereinanderlagern. Es muß berücksichtigt werden, daß sich die (-) Ladung auf einen Ring verteilt, dessen Volumen  $(1 + k \omega^2)^2$  mal größer ist als das Volumen des Ringes, welches die (+) Ladung trägt. Der Überschuß der (+) Ladung pro Volumeinheit ist (da  $k \omega^2$  sehr klein ist)  $2 e k \omega^2$ , und demnach ist die Fernwirkung der Schicht  $dr$  der Stromstärke  $\delta i_r$  äquivalent, wobei:

$$(6) \quad \delta i_r = +2 e k \omega^2 v B dr = +2 e k \omega^3 B r dr.$$

Demnach ist die magnetische Fernwirkung einem galvanischen Strom äquivalent, dessen Stromdichte mit  $r$  direkt proportional wächst.

§ 8. Die magnetische Fernwirkung des rotierenden Zylinderringes setzt sich aus den Wirkungen (a), (b) und (c) zusammen und kann durch ein entsprechendes Strömmodell ersetzt werden. Bei der Ausführung des Strömmodells ist es vorteilhaft, mit einer Stromstärke zu operieren und die Anzahl der Draht-

windungen so zu wählen, daß die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt werden.

Aus (a) und (b) folgt, daß die Anzahl  $N$  der Drahtwindungen pro Zentimeter Höhe des Ringes mit  $R^2$  wachsen, wobei  $R$  die Zahl der Zentimeter bedeutet, welche die entsprechenden Halbmesser besitzen:

$$N_2 = R_2^2 \quad \text{aus (4),}$$

$$N_1 = R_1^2 \quad \text{aus (5).}$$

Nach (c) müssen im Innern des Querschnittes des Ringes die Windungen so angeordnet werden, daß die Anzahl  $n$  der Drahtwindungen, welche pro Quadratcentimeter kommen, dem in Zentimetern gemessenen Abstände  $r$  von der Rotationsachse entsprechen:

$$n = 2r.$$

Wie leicht ersichtlich, ist die Summe  $\Sigma n$  aller Windungen, welche im Querschnitt pro Zentimeter Höhe  $B$  verteilt sind:

$$\Sigma n = N_2 - N_1.$$

Da die Ströme der Außenfläche der (-) Ladung, die des Ringquerschnittes und seiner Innenfläche der (+) Ladung entsprechen, so müssen die Drahtwindungen so hintereinander geschaltet werden, daß  $N_1 + \Sigma n$  Windungen in der einen Richtung und  $N_2$  Windungen in der entgegengesetzten Richtung vom Strome durchflossen werden.

§ 9. Bei der Ausführung waren  $R_1 = 1$  cm,  $R_2 = 3$  cm und die Höhe  $B = 2$  cm. Das Strommodell (Fig. 2) wurde

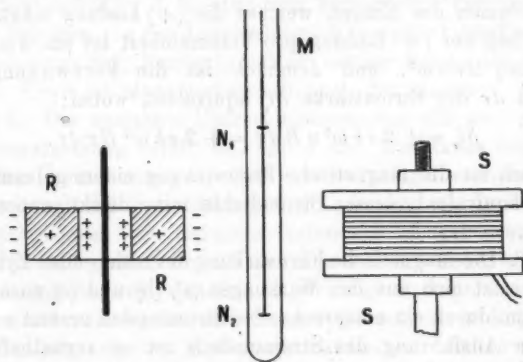


Fig. 2.

aus koaxialen Solenoiden, welche auf Ebonitzylinder gewickelt waren, gebildet. Das äußere Solenoid trug 18 Windungen, das innere 2 Windungen aus 0,2 mm dickem Kupferdraht; die übrigen 16 Windungen wurden auf die vier zwischenliegenden Solenoide in entsprechender Weise verteilt und alle Windungen in einen Stromkreis geschaltet.

§ 10. Um den zu erwartenden Betrag der magnetischen Fernwirkung bei der Rotation eines gleichgroßen Zylinderringes schätzen zu können, wurde der Äquator des Strommodells in die unmittelbare Nähe einer kleinen (3 mm langen) Magnetnadel einer Tangentenbussole gebracht, in die Windungen der Tangentenbussole ein solcher Strom eingeleitet, daß im Mittelpunkt ihrer Windungen ein magnetisches Feld von 0,35 Gauss entstand (eine Feldstärke, die am Erdäquator herrscht) und hierauf die Stromstärke im Strommodell so lange gesteigert, bis die Nadel der Tangentenbussole auf Null zurückging, was bei einer Stromstärke von

$$J = 0,25 \text{ Amp.}$$

eintrat. Die nach § 5 zu schätzende magnetische Stromstärke, welche ein Ring bei 500 Touren pro Sekunde entwickeln könnte, würde im günstigsten Falle einer Stromstärke im Strommodell von etwa  $i = 0,001 \text{ Amp.}$  entsprechen. Aus Gründen, welche in § 6 angeführt sind, wäre dieser Wert noch stark zu verkleinern. In betreff der zu wählenden Empfindlichkeit des Magnetometers ist man auf diese rohen Schätzungen angewiesen, da über das Produkt  $ek$ , welches das zu untersuchende Material charakterisiert, ohne weitere Hypothesen nichts ausgesagt werden kann.

### III. Die Versuchsanordnung.

§ 11. Die Versuchsanordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich: die Friktionsscheibe  $F^1$ , welche auf der horizontalen Bronzeachse  $Q$  sitzt und durch einen Schnurlauf von einem Elektromotor angetrieben wird, wird durch den Druck der Spitze  $Z$  auf Rädchen  $K$  gepreßt und gibt der vertikalen biegsamen

1) Als geeignete Reibungsflächen erwiesen sich für die Scheibe  $F$  eine Lederscheibe  $L$ , welche auf eine Gummischeibe  $G$  gepreßt war; das gerippte Rädchen  $k$  war aus Messing. Die Achsen  $Q$  und  $AA$  liefen in dünnwandigen eisernen Lagereinsätzen, zu welchen das Schmieröl unter Druck zugeführt wurde.

Messingachse *AA* etwa 500 Touren pro Sekunde; das Schraubengewinde der Achse *AA* greift in ein Zahnrad aus Elfenbein des Tourenzählers *T* ein.

Auf die Achse *AA* kann der zu untersuchende Ring *R* aufgesetzt werden. Die Differenz der Ablenkungen des astatischen Magnetometers *M* beim Leerlauf der Achse *AA* und bei

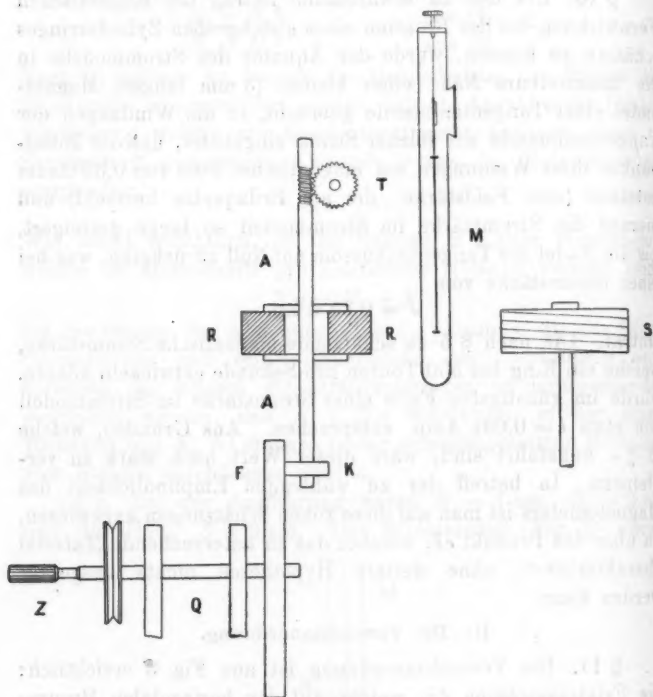


Fig. 3.

ihrer Rotation mit dem Ringe *R* ergab die gesuchte magnetische Fernwirkung des rotierenden Ringes.

Um von der wechselnden Empfindlichkeit des Magnetometers *M* unabhängig zu sein, wurde diese Empfindlichkeit durch das Strommodell *S* (bei einer Stromstärke von

$$i = 0,0005 \text{ Amp.},$$

welcher eine Ablenkung des Magnetometers von 3—8 Skt. entsprach) während der Versuche geprüft.

§ 12. Die Wirkung der Foucaultschen Ströme, welche in den rotierenden Teilen entstehen und auf das Magnetometer einwirken können, wurde dadurch ausgeschlossen, daß senkrecht zum magnetischen Meridian zwei Drahtwindungen von je 1,6 m Durchmesser angebracht wurden, mit deren Hilfe es möglich war, die Horizontalkomponente des Erdfeldes um den Ring *R* auf Null zu kompensieren.

§ 13. Das Magnetometer *M* war auf einer unabhängigen Stütze montiert und befand sich in einem Glasrohre mit Petroleum, welches seine Schwingungen aperiodisch machte. Der Abstand seiner Nadeln voneinander war 8 cm (der Achsenabstand des rotierenden Ringes und des Strommodells war 12 cm); über der unteren (stärkeren) Nadel befand sich ein kleiner Ring aus ausgeglühtem Eisendraht, welcher so angebracht werden konnte, daß beim Stromschlusse in den Drahtwindungen, welche das Erdfeld kompensieren, das Magnetometer um weniger als  $\pm 0,5$  Skt. abgelenkt wurde.

#### IV. Die Versuche.

§ 14. Die Versuche wurden mit Ringen von Ebonit, Messing, Wasser und Benzol ausgeführt. Der Ebonitring war aus einem Stück hergestellt, die aus leitendem Material (Aluminium, Messing) bestehenden Ringe waren aus je zehn dünnen (gegen 2 mm) Scheiben gefertigt, die durch Zwischenlagen von Seidenpapier voneinander isoliert waren. Die Flüssigkeiten (Wasser, Benzol) wurden in Bronzegefäße gefüllt, deren Höhlung den oben angegebenen Dimensionen des Ringes entsprachen und durch acht radial gestellte Zwischenwände in einzelne Kammern geteilt waren, um ein Zurückbleiben der Flüssigkeit bei der Rotation zu vermeiden.

Die Versuche wurden bei 30000 Umdrehungen pro Minute ausgeführt, wobei die Geschwindigkeit an der Peripherie gegen 0,2 der Lineargeschwindigkeit der Erdrotation am Äquator betrug. Die magnetische Fernwirkung des Strommodells bei 0,1 Amp. Stromstärke entsprach einer der Erdäquatorgeschwindigkeit gleichen Geschwindigkeit an der Peripherie des rotierenden Ringes. Die in den Versuchen angewandte Geschwindig-

keit entsprach einem Strom von  $0,1 \times (0,2)^3 = \text{ca. } 0,001 \text{ Amp.}$  im Strommodell; zirkulierte ein solcher Strom in den Windungen des Modells, so gab das Magnetometer einen Ausschlag von 10 Skt.

Die mit den Ringen aus Ebonit, Messing, Aluminium, Wasser und Benzol ausgeführten Versuche *ergaben keinen merklichen Ausschlag des Magnetometers.*

Überlegungen von der Art, wie die in § 6 angeführten, lassen schließen, daß unter Verhältnissen und bei Dimensionen der rotierenden Körper, wie sie in diesen Versuchen zur Anwendung kamen, möglicherweise nur äußerst schwache magnetische Wirkungen auftreten, die nicht mehr durch magnetometrische Methoden entdeckt werden können.

Die angenommene Hypothese zu prüfen, müßte dann das ganze Versuchsschema abgeändert werden, um eine hinreichende Empfindlichkeit bei den Messungen zu erreichen, — eine Empfindlichkeit, die vielmal größer sein müßte als die, welche in den oben angeführten vorläufigen Untersuchungen verwandt werden konnte.

Die vorliegende Untersuchung wurde im Physikalischen Institut der Moskauer Universität begonnen und wird gegenwärtig von mir im Physikalischen Laboratorium der Moskauer Städtischen Universität (Schanjawszystiftung) fortgeführt.

Zum Schluß möchte ich dem Hrn. Mechaniker A. J. Akulow meinen Dank aussprechen, der mich in diesen schwierigen Untersuchungen zuerst in seiner Eigenschaft als Mechaniker des Physikalischen Institutes, sodann als Mechaniker der Städtischen Universität unterstützt hat.

*Anmerkung des Herausgebers.* Hiermit gelangt die letzte Arbeit des vorzeitig verstorbenen Forschers zum Abdruck. Der bei weitem größte Teil des hier veröffentlichten Textes fand sich im Nachlaß des Verfassers druckfertig bearbeitet vor. Bloß der letzte § 14 ist aus der entsprechenden russischen Publikation (Journ. d. russ. Physik.-chem. Gesellsch. 43. p. 484. 1911) des Verfassers herübergenommen und ins Deutsche übersetzt worden.

A. R. Colley.

(Eingegangen 14. Juli 1912.)



5. *Über die Erregung von Erdalkaliphosphoren  
durch Kanalstrahlen;  
von H. Baerwald.*

I. Das Problem.

1. Die von Kanalstrahlen in festen Körpern, insbesondere an der Glaswand des Entladungsrohres hervorgerufene Fluoreszenz hat schon bei den frühesten Untersuchungen über die magnetische und elektrische Beeinflussbarkeit der Strahlen die Rolle eines wichtigen Kriteriums gespielt. In Mitteilungen über die elektrische Entladung in verdünnten Gasen macht Herr W. Wien<sup>1)</sup> die Erscheinung zum Gegenstand besonderer Beobachtungen, die als wesentliches Ergebnis die Tatsache feststellen, daß die Farbe der von Kanalstrahlen auf Glas hervorgerufenen Fluoreszenz mit dem Gasinhalt des Entladungsrohres wechselt und ferner bei Zerlegung des Bündels in seine geladenen und ungeladenen Bestandteile an den Auftreffstellen der gesonderten Strahlteile ebenfalls Verschiedenheiten aufweist. So zeigte Luft im neutralen Teil braungelbe, im abgelenkten grüne Glasfluoreszenz, Wasserstoff überall wesentlich grüne, Quecksilber braunrote, von der durch Luft erregten deutlich verschiedene Fluoreszenz. Dabei entsprach die Intensität der Erregung an den verschiedenen Stellen nicht der der betreffenden erregenden Strahlenteile. Die Erscheinung war durch die Reinheit der Gasfüllung außerordentlich beeinflussbar und verdiente eine erneute Untersuchung, seitdem durch die von W. Wien eingeführte Methode kontinuierlicher Durchströmung des Gases durch das Entladungsrohr die Reinheit des Versuches sehr gesteigert war.

2. Dabei mochte es sich empfehlen, solche Körper zu wählen, die in ihrer chemischen Zusammensetzung gut definiert waren und bei der Erregung durch die Strahlen keine Dämpfe

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 252—256. 1902.

abgaben. Denn, war dies der Fall, so lagerte sich deren Fluoreszenz über die der festen Glaswand — die am Natronglase an der Auftreffstelle der Strahlen bemerkbare gelbe Fluoreszenzschicht ist mit dem Spektroskop leicht als leuchtender Natriumdampf nachzuweisen — und störte die Erscheinung, ganz abgesehen davon, daß man chemischer, von Fluoreszenz begleiteten Reaktionen zwischen diesen Dämpfen und dem Gasinhalt des Rohres nicht sicher war. Solche sekundären Vorgänge aber müssen ausgeschaltet bleiben, will man die Fragen entscheiden, welche die eben genannten Versuche von W. Wien nahelegen, nämlich die Fragen, ob die Emission eines phosphoreszenzfähigen Moleküls sowohl der spektralen Zusammensetzung, wie der Intensität nach, durch ein geladenes Kanalstrahlteilchen anders erregt wird als durch ein ungeladenes.

3. Durch die späteren von J. Koenigsberger, H. von Dechend und W. Hammer und J. J. Thomsen<sup>1)</sup> zur Erforschung der Natur der Kanalstrahlen veröffentlichten Arbeiten ist der erste Teil dieses Problems, ohne daß es besonders hervorgehoben wurde, zum Teil gelöst. Denn an den zur Analyse der Strahlen benutzten Willemitt- und Zinksulfidschirmen machte sich keine Spur eines Farbenunterschiedes an den Auftreffstellen der positiven, neutralen und negativen Bündel geltend. Dabei durchliefen die Strahlen einen Raum von  $10^{-4}$  bis  $10^{-5}$  mm Hg-Druck, in welchem die abgelenkten, zunächst aus positiven und negativen Teilchen bestehenden Bündel durch Regeneration nicht sogleich wieder in den Zustand des unabgelenkten zurückversetzt wurden. Der Einwand also, die Gleichheit der Fluoreszenz an den verschiedenen Stellen sei auf die Gleichheit des Zustandes in den drei Bündeln am Orte des Fluoreszenzschirmes zurückzuführen, kann hier nicht geltend gemacht werden; waren es doch gerade die in den genannten Untersuchungen durch gleichzeitige magnetische und elektrische Ablenkung erhaltenen Parabelbögen, an welchen man das Resultat ablas, daß die von

---

1) Literaturverzeichnis siehe in dem Bericht über die Kanalstrahlen im elektrischen und magnetischen Feld von H. v. Dechend und W. Hammer, Jahrb. f. Rad. und Elektronik 8. p. 34—91. 1911.

W. Wien gefundene Strahlregeneration, welche im Druckbereich von 0,05—0,001 mm Hg schon innerhalb weniger Zentimeter nach der Zerlegung jegliche Zustandsverschiedenheit der Bündel ausgleicht, bei Druckgrößen von einigen Hunderttausendstel Millimeter Hg an Strahllängen von  $\frac{2}{3}$  m Länge nur spurenweise noch zustande kommt.

4. Der zweite Teil der Frage bezieht sich auf das Verhältnis der Eigenenergie der einzelnen Kanalstrahlenbündel zu der von den Emissionszentren der Phosphore nach der Erregung hergegebenen. Diese Frage ist noch unbeantwortet, wenn auch hierüber schon einzelne Beobachtungen bestehen. So findet Herr W. Wien, daß die Fluoreszenz, die von Kanalstrahlen an festen Körpern, z. B. Glas, Willemit usw. erregt wird, stärker ist, wenn die positiv und auch wohl die negativ geladenen den Körper treffen, im Vergleich zur Erregung durch die ungeladenen Atome.

J. Koenigsberger und J. Kutschewski<sup>1)</sup> machen darauf aufmerksam, daß Phosphoreszenzschirme leicht falsche Bilder von der Intensitätsverteilung der Kanalstrahlen geben können. Wenn auch die Helligkeit der einzelnen Bilder auf Willemit- und Zinksulfidschirmen, — gleiches  $e/m$  und gleiches  $v$  vorausgesetzt, — anfangs proportional der Zahl der erregenden Teilchen sein mag, so sinkt doch nach kurzer Zeit die Intensität der am stärksten leuchtenden neutralen Stelle unter die der schwächer leuchtenden positiven herab.

Daß in diesen Fällen eine Zerstörung der durch die Kanalstrahlteilchen getroffenen Emissionszentren vorliegt, wird durch Untersuchungen von E. Goldstein<sup>2)</sup> wahrscheinlich gemacht. Eine solche wird auch bei den ersten Beobachtungen W. Wiens an Glas und Willemit stattgefunden haben.

5. Die vorliegende Untersuchung will nun zur Lösung der eben gestellten Frage (4.)<sup>3)</sup> ein Stück beitragen; sie will

1) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, *Ann. d. Phys.* 37. p. 161—282. 1912. Dasselbst p. 164.

2) E. Goldstein, Über die Emissionsspektren aromatischer Verbindungen in ultraviolettem Licht, in Kathodenstrahlen, Radiumstrahlen und Kanalstrahlen. *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* 14. p. 33—42. 1912, speziell p. 40—42.

3) Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die Paragraphen-numerierung.

entscheiden, ob es spezifische Erregung durch positive, neutrale und negative Kanalstrahlteilchen gibt, ob also bei der Bestimmung der Eigenenergie der verschiedenen Bündel mit Hilfe der Phosphoreszenz mit einem spezifischen, für jede Strahlengattung verschiedenen Proportionalitätsfaktor zu rechnen sei oder nicht. Der Plan der Untersuchung ist der, beide Energien, erregende wie erregte, in relativem Maß zu messen und aus dem Vergleich der Ergebnisse einschlägige Folgerungen zu ziehen.

## II. Die Versuchsanordnung.

6. Bei der Wahl der Versuchsanordnung brauchte auf ein äußerst hohes Vakuum im Beobachtungsraum nicht Bedacht genommen zu werden, wenn man nur sicher war, daß durch die Regeneration der Strahlen, die ja übrigens nichts an ihren Energiemengen ändert, nicht der ganze Unterschied in der Natur der Strahlen auf der Wegstrecke zwischen zerlegendem Feld und Ort der Beobachtung ausgeglichen wurde.

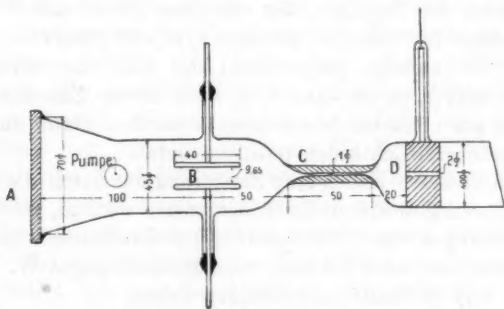


Fig. 1.

Demgemäß wurde Entladungs- und Beobachtungsraum durch eine 50 mm lange und 1 mm weite Kapillare *C* (Fig. 1) getrennt und der Druck in letzterem so eingestellt, daß die Strahlen in ihm fast gar nicht, dem völlig ausgeruhten Auge nur eben noch gerade wahrnehmbar leuchteten. Dies entspricht einem Drucke von ca. 0,003 mm Hg, während der Druck im Entladungsraum sich etwa auf das Zehnfache ein-

stellte, was eine Entladungsspannung von ca. 22000 Volt bedingte. Bei diesen Verhältnissen ließ sich mit dem Induktorium völlig befriedigende Konstanz der Entladungen erreichen.

Zur weiteren Kennzeichnung der Versuchsbedingungen mögen noch folgende Angaben dienen. Die Entfernung der Anode von der Kathode *D*, letztere mit einem Kanal von 2 mm Weite versehen, betrug 35 cm, der Rohrdurchmesser im Entladungsraum 40 mm, im Beobachtungsraum 45 mm, erweiterte sich aber nach dem Schirm zu trichterförmig auf 70 mm. Zur elektrischen Ablenkung dienten zwei polierte Messingplatten *B* von der Größe  $40 \times 12 \text{ mm}^2$ , im Abstände 9,65 mm, dessen Bestimmung mit dem Kathetometer vorgenommen wurde. Die Entfernung von der Feldmitte bis zum Phosphoreszenzschirm *A* betrug 100 mm, die Länge des Beobachtungsraumes 150 mm, so daß der Strahl vom Austritt aus der Kathode bis zum Schirm einen Weg von 220 mm zurückzulegen hatte. Die Kathode und eine Elektrode des elektrischen Feldes waren geerdet.

Die Feldspannung wurde von einer Influenzmaschine älterer Wehrsenscher Konstruktion geliefert, bei einigen zum Vergleich angestellten Versuchen auch von Hochspannungsakkumulatoren. Sie betrug im allgemeinen 900 bis 930 Volt. Das Gas durchströmte das Entladungsrohr in kontinuierlichem Strom und wurde vom Beobachtungsraum durch eine Gaedepumpe entfernt. Kühlung mit fester Kohlensäure in Äther zwischen Pumpe und Rohr befreite den Beobachtungsraum von schädlichen Dämpfen, insbesondere den von der Pumpe herrührenden Quecksilberdämpfen.

### III. Die Ausmessung der Phosphoreszenzintensität.

7. Die Phosphoreszenzschirme wurden mit möglichster Gleichmäßigkeit hergestellt. Das Bindemittel war stark verdünnte Wasserglaslösung, die nach Verdunsten des Wassers und Auftragen des Phosphors durch Dämpfe ein wenig klebrig gemacht wurde, das im Achatmörser zu unfehlbarem Pulver zerriebene und mit Battisttuch aufgestäubte Material gut festhielt, ohne es zu umhüllen und seine Leuchtfähigkeit zu beeinträchtigen.

tigen.<sup>1)</sup> Durch das Zerreiben der Phosphore schien ihre Erregungsfähigkeit nicht nennenswert herabgesetzt zu werden; Tageslicht wirkte auf den zerriebenen Phosphor ebenso intensiv wie auf den unzerriebenen. Der fertige Schirm wurde mit weißem Siegelack auf das Rohr gekittet; seine empfindliche Schicht war dünn genug, um Beobachtungen in der Durchsicht zu gestatten.

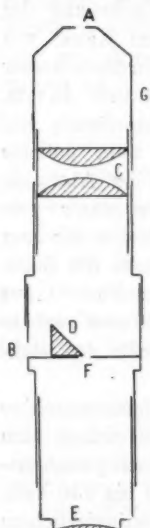


Fig. 2.

8. Das Photometer war dem von A. Becker<sup>2)</sup> bei Untersuchungen über die Diffusion von Natriumdämpfen in der Bunsenflamme benutzten ähnlich, nur daß im vorliegenden Falle entsprechend den lichtschwächeren Objekten für größere Lichtstärke des Instrumentes zu sorgen war. Zwei Linsen von 30 mm Durchmesser und 45 mm Brennweite entwarfen von dem in der Kappe *G* befindlichen Spalte *A* ein Bild auf der Schirmebene *F*, bzw. am Orte des in ihm liegenden kreisförmigen Fensters, wobei dafür gesorgt war, daß bei der Abbildung das Öffnungsverhältnis der Objektiven voll ausgenutzt war. Die Hälfte von *F* war durch ein kleines total reflektierendes Prisma von 10 mm Kantenlänge verdeckt, welches seitlich ihm durch das Fenster *B* zugestrahktes Licht ebenfalls nach *F* projizierte. *F* wurde durch die schwach vergrößernde Lupe *E* betrachtet. Das ganze Instrument war auf einem festen Fuße angebracht und mittels Zahntrieb in senkrechter Richtung, in der auch die Zerlegung des Kanalstrahlenbündels durch das Feld erfolgte, verstellbar. Das Fenster *A* strich unmittelbar am Schirm entlang, wobei ein vor einer Skala vorbeigehender Zeiger die Einstellung auf bestimmte Punkte der Fluoreszenzstreifen gestattete. Das durch das Fenster *B* tretende Vergleichslicht wurde durch passende Gelatinefilter

1) Wegen Herstellung von Fluoreszenzschirmen vgl. H. v. Dechend und W. Hammer, *Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik* 8, p. 41–42. 1911. Ferner J. J. Thomson, *Phil. Mag.* Okt. 1910 und *Physik. Zeitschr.* 11, p. 1131. 1910.

2) A. Becker, *Heidelb. Akad.* 7. Abh. 1911.

auf die Fluoreszenzfarbe des Schirmes abgestimmt, was in Anbetracht der verhältnismäßig geringen, in den Fluoreszenzstreifen vorkommenden Intensitätsunterschiede unbedenklich erschien. Dem Auge boten sich dann die beiden Vergleichsintensitäten auf geometrisch kongruenten, an einer scharfen Grenzgeraden aneinanderstoßenden Flächenstücken, Halbkreisen, dar. Die damit erreichte Sicherheit der Einstellung war eine völlig befriedigende.

9. Das Vergleichslicht war eine 4 Volt-Osramlampe, welche in einer Entfernung von 50 cm vom Fenster *B*, bzw. einer vor *B* befindlichen Mattscheibe fest aufgestellt und in ihrer Leuchtstärke durch einen Gleitwiderstand regulierbar war. Die Angaben des Stromzeigers, der tausendstel Ampere zu schätzen gestattete, waren bei gleicher Helligkeit der beiden Felder ein Maß für die Phosphoreszenzintensität. Indem man ferner die Strahlung der Osramlampe bei verschiedenen Stromstärken im Weberschen Photometer mit der einer Hefnerkerze verglich und aus der so gewonnenen, die Stromstärken den Lichtintensitäten zuordnenden Eichkurve die Flächenhelligkeit jener 50 cm von der Vergleichslampe entfernten, das Fenster *B* beleuchtenden Mattscheibe durch Multiplikation der Kurvenwerte mit dem Faktor 4 berechnete, ließ sich die Phosphoreszenzintensität direkt in Meterkerzen auswerten.

#### IV. Die Beobachtungsergebnisse.

10. Das Bild, welches der Phosphoreszenzschirm dem Auge darbot, gibt Fig. 3, dunkel für hell gezeichnet, annähernd wieder. Der neutrale Fleck *a* war etwa 6 mm im Durchmesser, nach außen abgeschattiert. Da der Durchmesser der Kapillare zwischen Entladungs- und Beobachtungsraum nur 1 mm beträgt, so sind die hier benutzten Strahlen also durch erhebliche Diffusion gekennzeichnet. Vom neutralen Fleck durch ein etwa 5 mm breites Minimum getrennt, lief, anfangs ebenfalls 6 mm breit wie der neutrale Fleck, nach außen zu sich aber verschmälernd,<sup>1)</sup> der positive Streif *bc* nach oben, der negative *d* nach unten. Besonders an dem positiven

1) Vgl. W. Wien, Ann. d. Phys. 8. 1902 die Sätze am Schluß von p. 254.



Streifen ließ sich ein hellerer Kern *b* von einem weniger hellen, diffusen Mantel *c* unterscheiden; am negativen Streifen war die Erscheinung nicht mit Sicherheit zu beobachten. Dies könnte auf folgende Tatsachen, die sich im elektrischen Feld abspielen, hindeuten: Die Kanalstrahlteilchen treten bei den hier gegebenen Drucken teils positiv, größtenteils aber — wie aus früheren Arbeiten W. Wiens bekannt — neutralisiert durch die Kathode. Eine beträchtliche Anzahl der ersteren durchfliegt den Beobachtungsraum zwischen dem elektrischen Felde, ohne eine Umladung zu erfahren. Dieser Teil bildet den Kern *b* des positiven Fluoreszenzfleckes. Da er geringe Diffusion zeigt, darf man



Fig. 3. annehmen, daß er auch den Raum zwischen Feld und Kathode bzw. Kapillare ohne erhebliche Umladungen durchheilt hat und daher als der „primär positive“ Teil des Kanalstrahls im Sinne J. Koenigsbergers anzusprechen ist.

Den Hauptbetrag des ganzen Bündels machen die im Feld neutral verlaufenden Teilchen aus. In gleicher Weise werden sie schon vor dem Feld das Übergewicht gehabt haben, da man annehmen darf, daß bei unseren Versuchsbedingungen spätestens in der Kapillare das Dissoziationsgleichgewicht sich hergestellt hat.

Von „primär negativen“ Teilchen deutet der Phosphoreszenzschirm nichts an. Was wir im negativen Streifen vor uns haben, sind die Teilchen, welche durch Aufnahme eines Elektrons, sei es vor, sei es in dem elektrischen Felde sich aus neutralen Teilchen bildeten, oder aber solche, die sich im Felde aus negativen zu neutralen zurückbildeten.

Das gleiche gilt von denjenigen Strahlenbündeln, welche den Saum des positiven Streifens erregen. Denn größere Diffusion wird den Strahlanteilen zuzuschreiben sein, welche mehrfache Umladungen erfuhren, als etwa den primär positiven, bei welchen dies, sei es vor, sei es in dem ablenkenden Felde, nicht der Fall war.

Über die Vorgänge zwischen Feld und Schirm sagen die Phosphoreszenzerscheinungen nichts aus. In keinem Falle machte sich ein Farbenunterschied zwischen den verschiedenen

Partieen geltend. Daß dies auf völlige Gleichheit in den Zuständen der verschiedenen Bündel nicht notwendig gedeutet zu werden braucht, haben wir bereits gesehen. (3.)

11. Im folgenden seien die Ergebnisse der photometrischen Beobachtungen in Kurven wiedergegeben; bei dem CaBi-Phosphor ist zur Verdeutlichung des Meßvorganges eine Tabelle als Beispiel hinzugefügt. Die einzelnen Punkte sind im allgemeinen in Abständen von 2,5 mm aufgenommen.  $P$  bezeichnet die Stellung des Photometerspaltes am Phosphoreszenzschirm in Zentimeter der Skala, wobei der Nullpunkt im Maximum des neutralen Fleckes angenommen ist und die Verschiebung nach dem positiven und negativen Streifen mit einem vorgesetzten +, bzw. - angedeutet ist.  $A$  bedeutet die der Vergleichslampe zugeführte Stromstärke in Amperen, welche nötig ist, um durch Vermittlung der Mattscheibe die Helligkeit des Vergleichsfeldes der des betrachteten Stückes im Phosphoreszenzstreifen gleich zu machen,  $H$  die Lichtstärke der Lampe in Hefnereinheiten. Unter  $M$  ist die entsprechende Helligkeit in Meterkerzen angegeben, welche nach den Angaben von Nr. 9 berechnet ist. Die Kurven geben den Zusammenhang der Größen  $P$  und  $M$  wieder, veranschaulichen also die Flächenhelligkeiten an den einzelnen Stellen der Streifen bis auf einen, durch das Photometer bedingten Proportionalitätsfaktor.

Durch Kontrollversuche, welche zur Eichung der Vergleichslampe statt des Weberschen Photometers das in Fig. 2 dargestellte benutzten, wurde dieser Faktor zu etwa 0,95 bestimmt. In den Resultaten ist er nicht mit verrechnet, weil er je nach den angewandten Farbfiltern etwas variierte. Aus dem gesamten Beobachtungsmaterial sei für jeden Phosphor eine Reihe für Luft- und eine solche für Wasserstoffkanalstrahlen herausgegriffen. Für alle gilt eine Entladungsspannung von ca. 22000 Volt, gemessen an einer parallel mit dem Rohr liegenden, 7 mm langen Funkenstrecke zwischen Kugeln von 1 cm Durchmesser, sowie eine mittels eines Braunschen Elektrometers kontrollierten Spannung des ablenkenden Feldes von 900 bis 930 Volt.

12. CaBi.<sup>1)</sup> Luft.

Tabelle 1.

<i>P</i>	<i>A</i> · 10 <sup>3</sup>			<i>H</i>			<i>M</i> · 10 <sup>3</sup>		
- 2,25	230	237		0,035	0,045		140	180	
2,0	237			0,045			180		
1,75	237	240		0,045	0,050		180	200	
1,5	240	239		0,050	0,048		200	192	
1,25	239	242		0,048	0,055		192	220	
1,0	245	243	241	0,061	0,056	0,052	244	224	208
0,75	240	240	237	0,050	0,050	0,045	200	200	180
0,5	248	250	252	0,068	0,073	0,078	272	292	312
		255			0,087			348	
0,25	272	280		0,157	0,195		628	780	
0	291	292		0,255	0,260		1020	1040	
+ 0,25	290	289		0,250	0,243		1000	972	
0,5	260	266		0,104	0,128		416	512	
0,75	245	248		0,061	0,068		244	272	
1,0	254	256	258	0,084	0,090	0,097	336	360	388
1,25	252	250	248	0,078	0,073	0,068	312	292	272
1,5	242	245	248	0,054	0,061	0,068	216	244	272
1,75	245	240		0,061	0,050		244	200	
2,0	240			0,050			200		
2,25	235	238		0,042	0,047		168	188	
2,5	229			0,034			136		
2,75	221			0,025			100		

Der bei Erregung mit Sonnenlicht bläulich-violette Phosphor leuchtete unter den Kanalstrahlen hellblau ohne eine Spur von Violett. Die Intensität war sehr beträchtlich und ließ bei tagelangen Versuchen nicht merklich nach.

Die Farbenscheinungen der Gesamtemission des Phosphors war bei Wasserstoffkanalstrahlen weder hier noch in einem der folgenden Fälle von derjenigen bei Luftkanalstrahlen verschieden, nur war die Phosphoreszenzintensität bei Wasserstoff leicht größer zu erhalten. Stellte man aber sorgfältig auf gleiche Spannung ein, was bei Wasserstoff durch größeren Druck im Entladungsraum zu erreichen war, so wurde sie im

1) Die hier gebrauchte abkürzende Bezeichnung der Erdalkaliphosphore ist die nach dem Vorgange Lenards allgemein übliche.

wesentlichen der Intensität bei Luftkanalstrahlen gleich. Daß übrigens diese auch mit Wasserstoffkanalstrahlen untermengt waren, bedarf als wohl selbstverständlich kaum der Erwähnung;

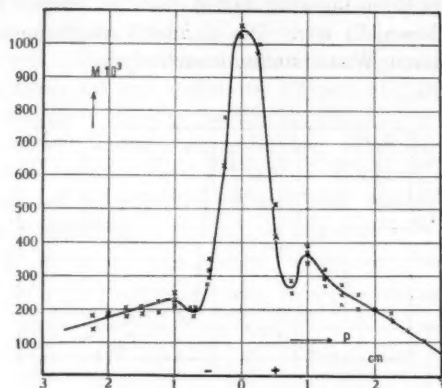


Fig. 4. (CaBi. Luft.)

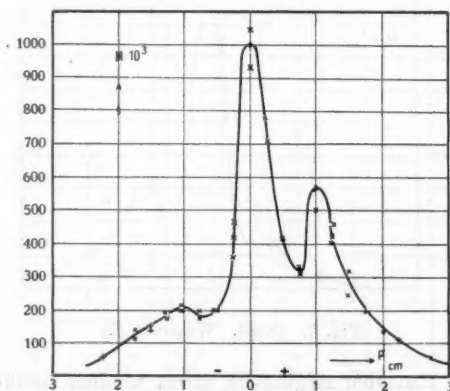


Fig. 5. (CaBi. Wasserstoff.)

ist doch Wasserstoff überhaupt nicht aus der Rohrfüllung zu beseitigen. Bei den vorliegenden Versuchen kam es zudem hinsichtlich der Gasfüllung nicht auf sehr große Reinheit an, die Durchströmung hielt sie auf genügender Höhe, und so

waren auch bei vorhandener Kühlung Fetthähne keineswegs vermieden. Die Versuchsreihen mit Wasserstoffkanalstrahlen wurden nach den mit Luftstrahlen angestellten vorgenommen, nachdem das Rohr tagelang mit Wasserstoff gespült und dabei mit Strom beschickt war. Die gleiche Vorsichtsmaßregel gilt für alle anderen Wasserstoffuntersuchungen.

### 13. SrBi.

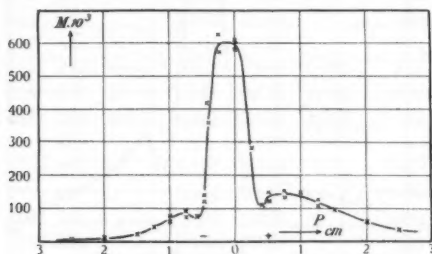


Fig. 6. (SrBi. Luft.)

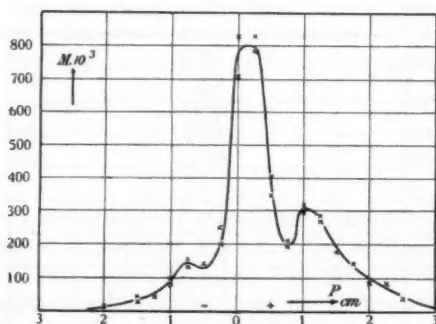


Fig. 7. (SrBi. Wasserstoff.)

Dieser Phosphor zeigte sich etwas weniger beständig und, wie die Kurven zeigen, in seiner Intensität geringer als CaBi. Seine Farbe war bei Kanalstrahlererregung dieselbe wie bei Erregung durch Sonnenlicht.

Bei Gelegenheit dieser Versuche wurde die Möglichkeit ins Auge gefaßt, daß Verschiedenheit der Phosphorzusätze einen Einfluß auf die Erscheinungen haben könnte. Indessen

ließ sich ein solcher weder in der Farbe noch in der Intensität bemerken, wenn, wie es der Fall war, sich die Variation auf solche Zusätze erstreckte, die auch bei Lichterregung keinen Unterschied der Emission bedingen. Den Versuchen weiteren Umfang zu geben, lag nicht im Interesse des Zieles dieser Arbeit. Überdies muß eines hervorgehoben werden: Die Phosphore, als gut definierte Körper, können schließlich nur ihre bestimmten Banden emittieren, gleichgültig von welcher Erregung diese Emission ausgelöst ist. Also darf von vornherein kaum erwartet werden, daß die Einflüsse der Zusätze den Kanalstrahlen gegenüber andere sein werden als gegenüber dem Sonnenlicht.

#### 14. BaBi.

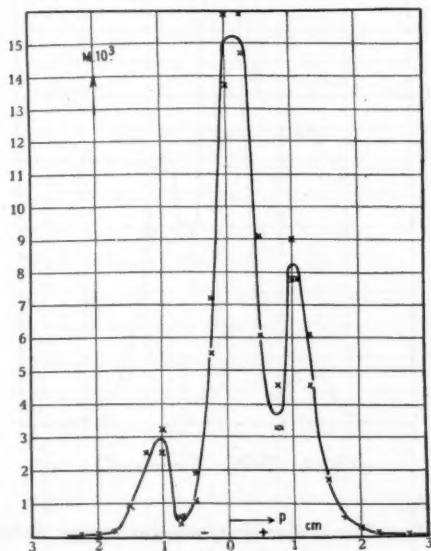


Fig. 8. (BaBi. Luft.)

Der unter Einwirkung von Sonnenlicht recht kräftig grünlichgelb leuchtende Phosphor zeigte unter den Kanalstrahlen eine sehr schwache, eben noch meßbare Erregungs-

fähigkeit. So weit sich bei der geringen Intensität beurteilen ließ, war das Grünlichgelb in einen rein gelben Ton übergegangen.

Der für die vorigen Kurven bei den Ca- und Sr-Phosphoren benutzte Maßstab würde für den Ba-Phosphor nicht ausreichen, so daß eine 100 fache Vergrößerung zur Veranschaulichung des Intensitätsverlaufes gewählt wurde.

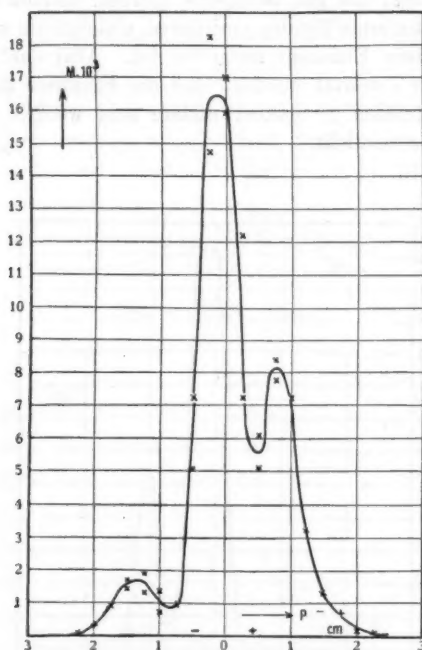


Fig. 9. (BaBi. Wasserstoff.)

### 15. BaCu.

Dieser Phosphor erwies sich, wie der vorige, durch Sonnenlicht kräftig erregbar, bei Kanalstrahlerregung dagegen ebenfalls als ziemlich matt. Merkwürdig ist er durch den hier besonders stark hervorstechenden Unterschied in der Farbe bei den verschiedenen Erregungsarten: Sonnenlicht läßt ihn in einem schönen Orangerot, Kanalstrahlen in lichtem Gelb leuchten.



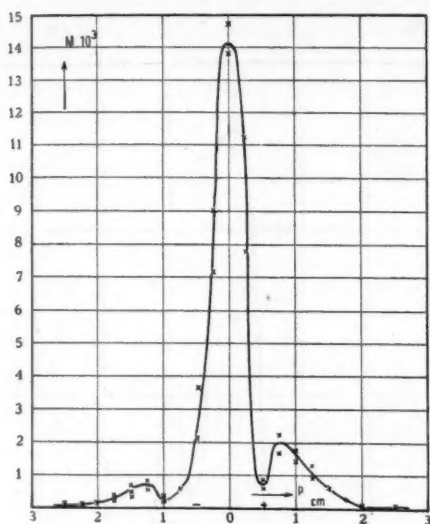


Fig. 10. (BaCu. Luft.)

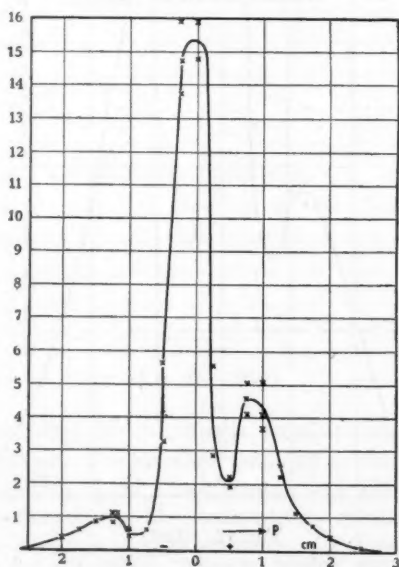


Fig. 11. (BaCu. Wasserstoff.)

## 16. ZnS.

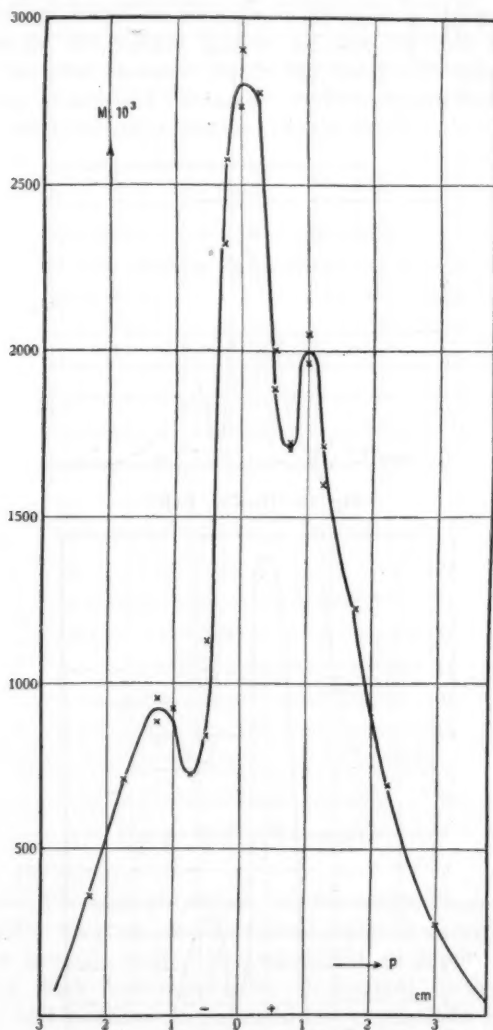


Fig. 12. (ZnS.)

Der hier gebrauchte Maßstab entspricht wieder dem bei den Ca- und Sr-Phosphoren angewandten.

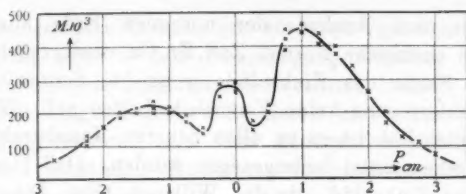


Fig. 13. (ZnS.)

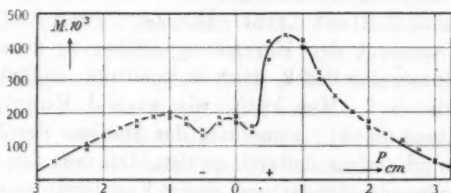


Fig. 14. (ZnS.)

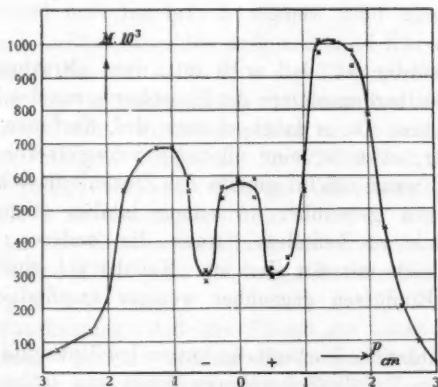


Fig. 15. (ZnS.)

Das Zinksulfid, die Sidotblende, ist ganz nach Analogie der Phosphore gebaut. Das Erdalkalimetall ist in seiner Verbindung mit dem Schwefel durch Zink ersetzt, und Zink ist zugleich auch das wirksame, das Emissionszentrum darstellende Metall. Der Zusatz ist durch Kupfer vertreten; die Zusammensetzung

wäre also nach Analogie der normalen Erdalkaliphosphore durch die chemische Formel  $\text{ZnS}$ ,  $\text{Zn}$ ,  $\text{Cu}$  wiederzugeben.

Die Farbe des Zinksulfids weist bei Sonnenlicht- und Kanalstrahlerregung keine Verschiedenheiten auf. Wegen der großen Intensität ist es zu allen neueren Kanalstrahlanalysen als Fluoreszenzmittel herangezogen worden. Daß hierbei aber gerade das Zinksulfid, wie das Willemit, Glas, Diamant usw. zerstörenden Einflüssen unterworfen ist, berichteten wir schon früher (4.) als Ergebnis neuerer Untersuchungen J. Koenigsbergers und E. Goldsteins. Die Zerstörung dürfte einfach von der Intensität der Einwirkung abhängen; denn sie tritt zuerst im neutralen Fleck, dann im positiven, endlich im negativen Streifen auf. Man kann, wie auch J. Koenigsberger und J. Kutschewski<sup>1)</sup> bemerken, das Stadium der Zerstörung des Zinksulfidschirms dadurch prüfen, daß man den Druck im Beobachtungsraum erhöht und durch Kanalstrahlen, bzw. Entladungen vom elektrischen Feld her, den Schirm zum diffusen Leuchten bringt. Die beanspruchten Stellen zeichnen sich alsdann mehr oder weniger dunkel auf dem helleren Untergrunde ab.

Merkwürdig ist, daß auch intensives ultraviolettes Licht einer Quecksilberbogenlampe die Phosphoreszenz des Zinksulfids zerstören kann. Da es dabei schwarz wird, darf man chemische Umlagerung, etwa in eine allotrope Schwefelverbindung vermuten, und zwar scheint gerade das Zinksulfidmolekül solchen Umlagerungen gegenüber in einem labilen Gleichgewichtszustand sich zu befinden. Auch die anderen Phosphore schwärzen sich mit der Zeit im Kanalstrahl, sind aber zerstörenden Einflüssen gegenüber weniger empfindlich als das Zinksulfid.

17. Zahlreiche Vorversuche hatten bei Zinksulfid im Gegensatz zu den Erdalkaliphosphoren jenes aus früheren Untersuchungen her bekannte Resultat ergeben, daß die Intensität des neutralen Fleckes geringer ist als die des positiven und selbst die des negativen Streifs. Solche Ergebnisse stellten sich dann ein, wenn der Schirm schon vorher den zur Reinigung

---

1) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Ann. d. Phys. 37. p. 164. 1912.

des Rohres nötigen Entladungen ausgesetzt gewesen war. So wurde denn also in dem Strahlengang zwischen Feld und Schirm im Beobachtungsraum ein mittels Schliff drehbares Schutzblech eingeschaltet und dieses erst dann aus dem Strahlengang entfernt, als nach genügender Reinigung des Rohres und konstanter Einstellung der Strahlen die Beobachtungen beginnen sollten.<sup>1)</sup>

So gibt Kurve Fig. 12 die Aufnahme wieder, die rasch, in den ersten 5 Minuten, mit Wasserstoffkanalstrahlen gemacht wurde, indem das Photometer nicht der Reihe nach an die einzelnen Punkte gebracht, sondern sprungweise, bald hier, bald dort eingestellt wurde. Nach 5 Minuten war die neutrale Intensität schon unter die positive gesunken, diese selbst war aber ebenfalls, wie auch die negative, stark herabgegangen, wenn auch nicht so stark wie die neutrale (Fig. 13). Nach einer halben Stunde ist der neutrale Fleck schon weniger intensiv als der negative Streifen. Die beiden abgelenkten Partien sind kaum mehr in der Helligkeit herabgegangen (Fig. 14).

Die mit Luftkanalstrahlen aufgenommene Kurve entspricht diesem letzten Stadium. Sie hat die Besonderheit, daß sie bei höherer Entladungsspannung aufgenommen ist als alle übrigen, 31600 Volt. Trotzdem gelten für sie auch die quantitativen Beziehungen, welche als für 22000 Volt Entladungsspannung gültig, für die anderen Versuchsreihen in den Tab. 3 und 4 zusammengestellt sind.

18. An die Zusammenstellung der Kurven und Einzel Tatsachen knüpfen wir jetzt die folgenden zusammenfassenden Bemerkungen.

Die Erscheinung, daß die Phosphore unter den Kanalstrahlen zum Teil mit anderer Farbe leuchten als bei Erregung mit Sonnenlicht, dürfte durch die Arbeiten der Herren P. Lenard und W. Klatt über Erdalkaliphosphore<sup>2)</sup>, insbesondere diejenigen Untersuchungen, welche sich auf den

1) Die Strahlen werden erst einige Zeit nach Beginn der Entladungen konstant. Sämtliche Beobachtungen begannen erst dann, wenn das Stadium konstanter Strahlenstärke erreicht war.

2) P. Lenard und W. Klatt, Über die Erdalkaliphosphore. Ann. d. Phys. 15. 1904. Speziell Kapitel C. p. 425—462.

Einfluß der Temperatur auf die Intensität der einzelnen Banden beziehen, eine einfache Aufklärung erfahren. Das Aufprallen der einzelnen Kanalstrahlteilchen führt dem einzelnen getroffenen Molekül des Phosphors eine beträchtliche Menge kinetischer Energie zu, die gesamte, vom ganzen Strahl getroffene Fläche wird also bei der dauernden Wärmezufuhr eine erhöhte Temperatur annehmen, welche auf die Lichtemission modifizierend einwirkt. Wir weisen die Richtigkeit dieser Erklärung der bemerkten Farbenverschiedenheiten an Hand der a. a. O. gegebenen Tabellen im einzelnen kurz nach.

19. Der CaBi-Phosphor leuchtet bläulich-lila bei Erregung mit Sonnenlicht, unter Kanalstrahlen hellblau. Dies entspricht dem Befunde, daß die rote Kältebande ( $\gamma$ ) des Phosphors über  $170^\circ$  unmerklich wird, die grüne Hitzebande ( $\beta$ ), unterhalb  $17^\circ$  unmerklich, bei  $300^\circ$  von größter Dauer, erst bei  $450^\circ$  verblaßt, aber selbst bei  $500^\circ$  C. noch nicht verschwunden ist. Auch die blaue Hauptbande ( $\alpha_2$ ), bis zu  $200^\circ$  beständig, dann erst allmählich abnehmend, dürfte bei Kanalstrahlerregung die Gesamtfarbe noch mitbestimmen. Vor allem wird sie aber dem Hervortreten der grünen  $\beta$ -Bande ihren Unterschied gegenüber Sonnenlichterregung verdanken.

20. SrBi leuchtet bei Sonnenlichterregung wie unter Kanalstrahlen licht grün. Der Phosphor besitzt als Hauptbande eine gelbgrüne  $\beta$ -Hitzebande, die, bei  $-45^\circ$  beginnend, ihre Maximalintensität bei  $200^\circ$  hat und erst über  $400^\circ$  verschwindet. Neben ihr gelangen die rote Kältebande ( $\gamma$ ) gar nicht und auch die grünblaue  $\alpha_3$ -Bande bei beiden Erregungsarten nicht recht zur Wirkung.

21. BaBi leuchtet unter Sonnenlicht grüngelb, unter Kanalstrahlen sehr schwach gelblich. Neben der grüngelben  $\beta$ -Hitzebande macht sich bei Zimmertemperatur sowohl die ins Orange spielende gelbe  $\alpha_1$ -Bande, wie die grüne  $\alpha_3$ -Bande, in der Hitze aber nur die erstere geltend.

22. BaCu. Sein bei Sonnenlichterregung orangerotes, bei Kanalstrahlerregung gelbes Leuchten erklärt sich daraus, daß die orangegelbe Kältebande ( $\alpha_2$ ) die Emission von  $-180^\circ$  abnehmend bis  $350^\circ$  beeinflusst, wo sie verschwindet, die grüne Hitzebande ( $\beta_1$ ) dagegen umgekehrt von  $-180^\circ$  zunehmend,

bei  $300^{\circ}$  in größter Intensität ist, bei  $350^{\circ}$  dann wieder verschwindet.

23.  $\text{ZnS}$ ,  $\text{Cu}$ . Seine grüne  $\alpha$ -Bande scheint sowohl bei Zimmertemperatur wie bei höherer die Gesamtemission zu bestimmen.<sup>1)</sup> Dementsprechend läßt sich bei beiden Erregungsarten kein Farbunterschied feststellen.

24. Die Berechtigung der Meinung, daß die Farben der Phosphore bei Kanalstrahlerregung in ihrer Verschiedenheit gegenüber Sonnenlichterregung durch Temperatureigenschaften der Banden erklärt werden können, dürfte damit erwiesen sein. Indessen läßt sich auch über die Temperatur selbst, auf welche der Kanalstrahl den Phosphor bringt, etwas aussagen. Die Zusammenstellung zeigt, daß bei Kanalstrahlerregung die Farbe des  $\text{CaBi}$ -Phosphors hauptsächlich von der grünen, erst bei  $500^{\circ}\text{C}$ . verschwindenden Hitzebande, die Farbe des  $\text{SrBi}$ -Phosphors von einer grünen, erst oberhalb  $400^{\circ}\text{C}$ . verschwindenden Hauptbande bestimmt wird. Dagegen sind bei  $\text{BaBi}$  und  $\text{BaCu}$  solche Banden maßgebend, welche als Hitzebanden schon bei  $17^{\circ}$  ihr Maximum haben, bzw. schon bei  $350^{\circ}$  verschwinden.

Wenn man damit zusammenhält, daß der  $\text{CaBi}$ -Phosphor der hellste war,  $\text{SrBi}$  schon erheblich weniger hell leuchtete,  $\text{BaBi}$  und noch mehr  $\text{BaCu}$  aber äußerst schwache Erregung zeigte, so wird man auf die Folgerung gebracht, daß die Temperatur des Phosphors bei Kanalstrahlerregung zwischen  $300^{\circ}$  und  $350^{\circ}\text{C}$ . liegt.

Daß bei Erregung durch Kathodenstrahlen Ähnliches gilt, darf angenommen werden; bei langsamen Kathodenstrahlen kommen andere Bedingungen für die Leuchtintensität eines Phosphors hinzu, auf die wir etwas eingehen wollen, da sie auch bei Kanalstrahlerregung eine Rolle spielen können.

25. Herr Lenard hatte bei Beobachtung langsamer Kathodenstrahlen mit Hilfe der Phosphoreszenz<sup>2)</sup> gefunden, daß es für jeden Phosphor zwei charakteristische Konstanten gibt, eine die Helligkeit seiner Emission messende Intensitäts-

1) Vgl. P. Lenard, Über Lichtemission und deren Erregung. *Ann. d. Phys.* 31. p. 641—685. 1910.

2) P. Lenard, *Ann. d. Phys.* 12. p. 449—490. 1903.



konstante und eine Schwellengeschwindigkeit der Erregerstrahlen. (Vgl. a. a. O. Tab. 25. p. 469.) Letztere hatte die Bedeutung einer Grenze zwischen zwei wesentlich verschiedenen Erscheinungen. Oberhalb der Schwellengeschwindigkeit trat die Phosphoreszenz sofort beim ersten Auftreten der Strahlen ein, und ihre Intensität war der Strahldichte proportional; unterhalb der Grenze machte sich merkliche Verspätung der Phosphoreszenz bemerkbar, und ihre Helligkeit hing von der Strahldichte nicht ab.

Ob solche Schwellengeschwindigkeiten auch bei der Erregung von Phosphoren durch Kanalstrahlen vorkommen, müßten künftige Untersuchungen erweisen. Die vorliegenden gestatten in dieser Hinsicht keine Rückschlüsse. Die Intensitätskonstanten scheinen aber auch hier Geltung zu haben, wie die folgende Tab. 2 lehrt.

Tabelle 2.

Phosphor	Maximale Helligkeit des neutralen Fleckes in Meterkerzen für		Intensitätskonstante $\frac{1}{C}$ <sup>1)</sup>
	Luft	Wasserstoff	
CaBi	1,050	1,000	0,002
SrBi	0,600	0,800	0,00091
BaBi	0,015	0,016	
BaCu	0,014	0,015	
ZnS			
anfangs		2,800	0,00272
ZnS			
ermüdet		0,200	

Hier sind die für gleiche Kanalstrahlmengen geltenden Phosphoreszenzintensitäten, und zwar das Maximum des neutralen Fleckes, welches durch Einschaltung des ablenkenden Feldes nur unbedeutend beeinflusst wird, zusammengestellt. In der letzten,  $1/C$  überschriebenen Kolonne finden sich die a. a. O. (Tab. 25, p. 469) gegebenen Intensitätskonstanten. Ihre Reihenfolge stimmt mit derjenigen der vorhergehenden Kolonnen, freilich nicht den Verhältnissen nach, was auch nicht zu er-

1) Bezeichnung nach P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 469 Tab. 25. 1903.

warten ist. Daß die Bedeutung der Intensitätskonstanten in einer Charakterisierung der Temperatureigenschaften von Phosphoreszenzbanden liegt, darf nur vermutungsweise ausgesprochen werden.

26. Soviel über die qualitative Seite der Erscheinungen und die durch sie bedingten Intensitätsverhältnisse. Wir benutzen jetzt die photometrisch festgelegten Größen zu quantitativen Rückschlüssen auf die Zusammensetzung der Kanalstrahlen. Zuerst sei das Verhältnis des maximalen Phosphoreszenzintensität des positiven Bündels zu der des negativen für Luft und Wasserstoff betrachtet. Wir finden, daß dies Verhältnis in beiden Fällen ein verschiedenes ist. Die folgende Tabelle stellt die betreffenden Werte zusammen.

Tabelle 3.

Phosphor	Maximale Helligkeit der abgelenkten Bündel in Meterkerzen für				$\frac{a}{b}$		II I
	Luft		Wasserstoff		I.	II.	
	a) positiv	b) negativ	a) positiv	b) negativ	Luft	Wasserstoff	
CaBi	0,360	0,225	0,570	0,205	1,6	2,78	1,74
SrBi	0,140	0,090	0,305	0,145	1,56	2,10	1,35
BaBi	0,0083	0,0030	0,0081	0,0017	2,77	4,76	1,72
BaCu	0,0020	0,0007	0,0045	0,001	2,85	4,50	1,58
ZnS	1,000	0,685	2,000	0,930	1,45	2,15	1,48
			0,220	0,450		2,05	
			0,190	0,430		2,26	

Mittel: 1,57.

Wie man sieht, weisen die Zahlen der sechsten und siebenten Kolonne nicht eine solche Übereinstimmung auf, daß man auf sie sichere Schlüsse hinsichtlich des Überschusses der positiven über die negativen Strahlen gründen könnte. Jedenfalls besitzen die Messungen an den beiden Ba-Phosphoren nicht das gleiche Gewicht wie die übrigen. Die große Lichtschwäche bei den Beobachtungen an den Ba-Schirmen machte sie weniger sicher, wie denn auch die Zuverlässigkeit der Eichung der Vergleichslampe in diesen Bereichen geringster Lichtstärke abnimmt. So ist denn wohl der Überschuß der positiven Strahlenmenge über die negative in unseren Versuchen als ein etwa

1,5 facher bei Luft, als ein etwa 2,3 facher bei Wasserstoff einzuschätzen.<sup>1)</sup> Die achte Kolonne zeigt, daß das Überwiegen der positiven über die negative Strahlenmenge bei Wasserstoff rund 1,5 mal größer ist als bei Luft.

Diese Schlüsse gründen sich auf die festgestellte Tatsache, daß die Leuchtintensität eines Phosphors innerhalb eines Bereiches, den wir bei der Schwärzung einer lichtempfindlichen Schicht<sup>2)</sup> das Gebiet der Normalerregung nennen können, der erregenden Lichtmenge proportional ist. Es besteht kein Gegengrund für die Annahme, daß dasselbe Gesetz für die Erregung durch auflprallende Kanalstrahlteilchen gültig sei.<sup>3)</sup>

27. Das Hauptinteresse der vorliegenden Messungen liegt auf dem Vergleich der Intensitäten der abgelenkten Bündel zur Intensität des unabgelenkten. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der relativen Werte, die man aus den absoluten erhält, wenn man für jeden Phosphor die Intensität

1) Diese Verhältnisse sind durch den Druck im Beobachtungsraum bedingt. Hr. W. Wien findet in der dritten Untersuchung über positive Strahlen (Ann. d. Phys. 33. p. 871—927. 1910) einen geringeren Anteil negativer Teilchen. Die dort im Beobachtungsraum herrschenden Drucke werden nicht dieselben sein, wie die, welche die vorliesenden Resultate charakterisieren, sondern wahrscheinlich geringer.

2) Mit der Aufstellung dieser Analogie soll keine Behauptung über eine mögliche Verwandtschaft beider Naturprozesse verbunden sein. Vgl. darüber die Bemerkungen am Schluß dieser Mitteilungen. (41.)

3) Daß das Gebiet der Normalerregung bei Kanalstrahleneinwirkung nicht überschritten wird, ist durch zwei Tatsachen zu belegen. Erstens leuchten die von Kanalstrahlen erregten Phosphore stets schwächer als die von Licht erregten, so daß die für Licht gewonnene Erkenntnis erst recht auf den Fall der Kanalstrahlerregung Anwendung findet. Zweitens ist darauf hinzuweisen, daß in beiden Fällen der Erregung verschiedene Emissionszentren des Phosphors in Tätigkeit treten: Bei Licht sind es die Zentren der Dauerbanden, der *d*-Prozeß, bei Kathoden- und Kanalstrahlen dagegen hauptsächlich der *u*-Prozeß. (Vgl. P. Lenard, Über Lichtsummen bei Phosphoren. Heidelb. Akad. 1912. Abh. 5.) Da es nun aber nur bei dem ersteren möglich ist, die obere Grenzerregung eines Phosphors zu erreichen, bei dem letzteren dagegen, ebenso wie bei dem Momentanprozeß, nicht, so kann von der Möglichkeit, das Gebiet der Proportionalität zwischen erregender Strahlintensität und erregter Phosphoreszenzemission im neutralen Bündel etwa überschritten zu haben, von vornherein nicht die Rede sein. Dies muß in Ansehung der am Schluß der Untersuchung gezogenen Folgerungen besonders betont werden.

des positiven und negativen Streifens in Prozenten des neutralen Fleckes ausdrückt. Wir nehmen für die Intensitäten die Maximalwerte der betreffenden Ordinaten, wie sie Tab. 3 für den positiven und negativen Streifen, Tab. 2 für den neutralen Fleck gibt.

Tabelle 4.

Phosphor	Intensität in Prozenten des neutralen Bündels			
	Luft		Wasserstoff	
	positiv	negativ	positiv	negativ
CaBi	34,3	21,5	57,0	20,5
SrBi	23,3	15,0	38,1	18,1
BaBi	55,4	20,0	50,7	10,6
BaCu	14,3	5,0	29,7	6,6
ZnS (anfangs)			71,5	33,2

Es erreichen also die positiven und auch die negativen Streifen sehr hohe Intensitätsbeträge. Bei den positiven gehen sie bis zur Hälfte, in einem Falle bis zu drei Vierteln der Intensität des neutralen Fleckes, bei den negativen bis zu einem Drittel. Hiermit wird im folgenden das Verhältnis der Eigenintensitäten der einzelnen Kanalstrahlenbündel zu vergleichen sein.

#### V. Die Messung der Eigenintensität der einzelnen Kanalstrahlenbündel. Methode und Ergebnisse.

28. Die Intensität des zerlegten Kanalstrahlenbündels wurde mit der Thermosäule bestimmt. Zur Durchführung der Messungen wurde genau nach dem Muster des für die Phosphoreszenzbeobachtungen dienenden Rohres ein zweites hergestellt, dessen Beobachtungsraum für die Unterbringung der Thermosäule passend hergerichtet war. Vorbildlich war hierbei die von Herrn W. Wien in der dritten Abhandlung über positive Strahlen<sup>1)</sup> beschriebene Anordnung.

An die Stelle des Phosphoreszenzschirmes trat in genau der gleichen Entfernung von der Mitte des ablenkenden Feldes *B*

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 33. p. 871—927. 1910.



Spalt horizontal lag, also senkrecht zur Verschiebungsrichtung. Die Notierung der Ausschläge geschah in Abständen von je 1 mm. So wurde aus dem Bündel jeweils ein schmales Stück ausgeschnitten, welches allein zur Wirkung kam. Die Ströme wurden durch zwei, die aufgekittete Messingkappe *J* durchsetzende Drähte zum Galvanometer geleitet, einem nach dem d'Arsonvaltyp von Hartmann & Braun gebauten Instrument älterer Konstruktion. Seine Empfindlichkeit war  $2,6 \cdot 10^{-8}$  Amp./mm bei 215 cm Skalenabstand.

An der übrigen Versuchsanordnung wurde nichts geändert, so daß die folgenden Beobachtungen mit den früheren direkt vergleichbar sind. Das ablenkende elektrische Feld — Plattenabstand 9,88 mm gegenüber 9,65 mm in den früheren Versuchen — wurde wieder auf 900 bis 930 Volt gehalten, die Entladungsspannung ebenfalls wie früher auf ca. 22000 Volt, und nur zum Vergleich wurde je eine Beobachtung bei Luft- und Wasserstofffüllung mit geringerer Entladungsspannung ausgeführt.

29. Über die Berechtigung der Methode, die Energie der Kanalstrahlen mit Hilfe der Thermosäule zu messen, hat sich Herr W. Wien in einer besonderen Veröffentlichung<sup>1)</sup> ausgesprochen. Ein Unterschied der Kanalstrahlenwirkung auf berußte und unberußte Thermosäulen ward nicht gefunden, woraus hervorging, daß durch Kanalstrahlenreflexion keine wesentlichen Energieverluste entstehen. Neuerdings hat B. Saxén<sup>2)</sup> nachgewiesen, daß auch bei schiefer Einfall und höheren Spannungen keine Reflexion stattfindet, sondern eine solche erst unterhalb 10000 Volt, und zwar nur bei Sauerstoff konstatiert werden kann, während diese Grenze für Wasserstoff bedeutend tiefer zu liegen scheint. Die Wärmewirkung der Kanalstrahlen ist nur von deren Eigenenergie bedingt, dagegen von allen anderen Faktoren, z. B. auch spezifischen Verschiedenheiten der getroffenen Metalle unabhängig. Dies Resultat ist für uns von Bedeutung. Denn, wenn die die Wärmewirkung der Kanalstrahlen begleitenden Umstände als einflußlos erkannt sind, steht es nicht mehr frei, etwa eine spezifische Wirkung der positiven, negativen und neutralen Kanalstrahlteilchen auf die Thermo-

1) W. Wien, *Physik. Zeitschr.* 11. p. 377—379. 1910.

2) B. Saxén, *Ann. d. Phys.* 38. p. 319—354. 1907.

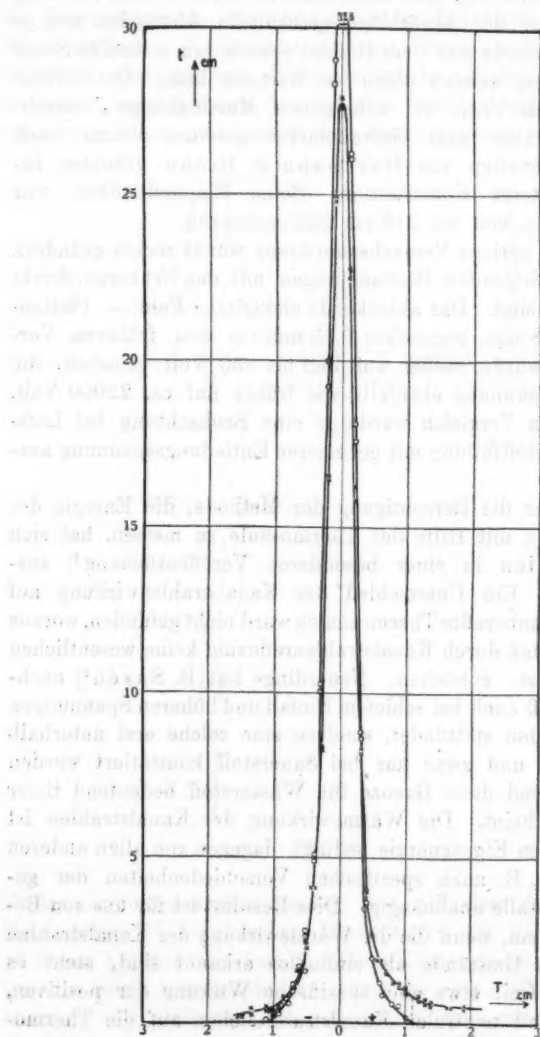


Fig. 17. (Luft. 22000 Volt.)

säule anzunehmen, eine Möglichkeit, die noch Hr. W. Wien<sup>1)</sup> diskutiert.

30. Die Messungsergebnisse p. 876–879 sind wie die früheren in Kurven wiedergegeben, welche die Abhängigkeit der Galvanometerausschläge in Zentimetern von den Stellungen der Thermosäule darstellen. Diese sind als Abszissen, jene als Ordinaten aufgetragen. Wir nehmen aus der Gesamtzahl der untereinander gut übereinstimmenden Beobachtungen nur je zwei bei Luft- und Wasserstofffüllung durchgeführte Reihen heraus. Eine von ihnen gilt für 22000 Volt, also für dieselbe Spannung, mit welcher die Phosphoreszenzbeobachtungen vorgenommen wurden, die andere, zum Vergleich angestellte, für eine Entladungsspannung von 11400 Volt. Es bezeichnet  $T$  den Stand der Thermosäule vor der Skala,  $A$  den zugehörigen Ausschlag; die mit ablenkendem Feld gemachten Beobachtungen sind durch Kreuze, die ohne Feld gemachten durch Kreise markiert.

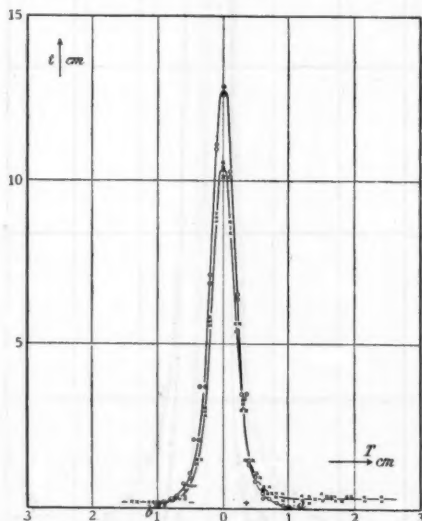


Fig. 18. (Luft. 11400 Volt.)

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 33. p. 872. 1910.



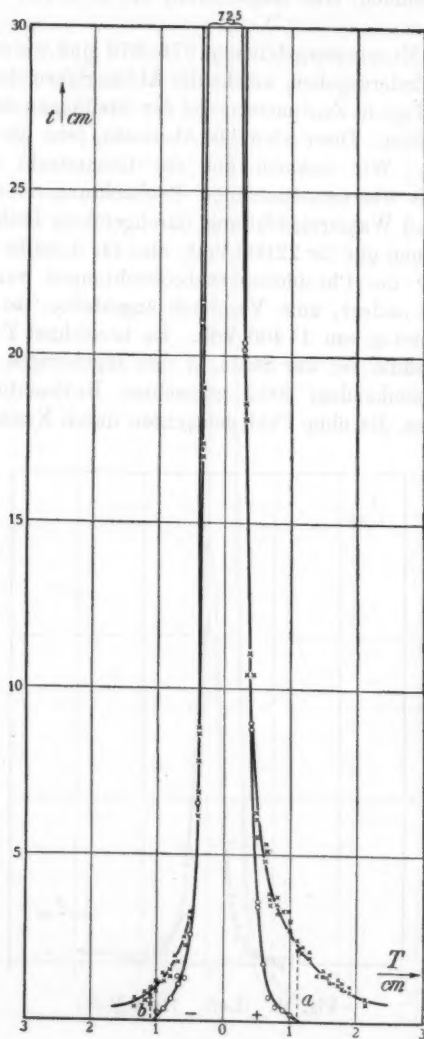


Fig. 19. (Wasserstoff. 22000 Volt.)

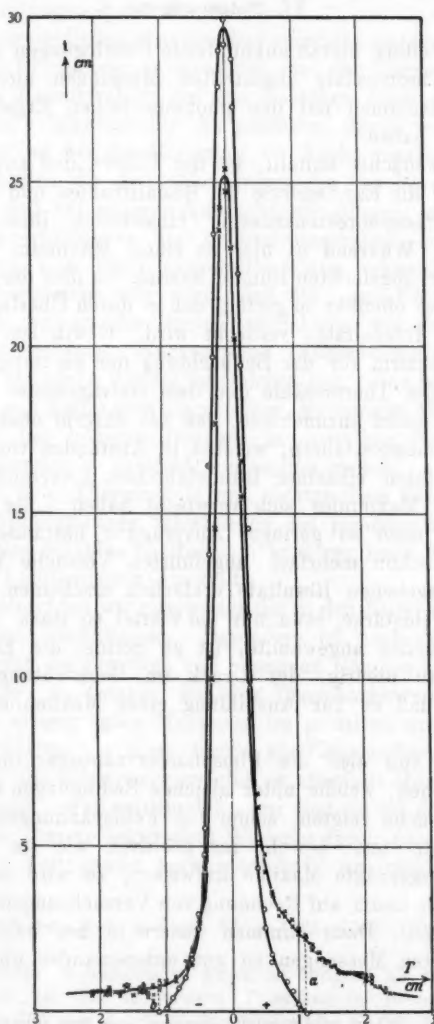


Fig. 20. (Wasserstoff. 11400 Volt.)

## VI. Folgerungen.

31. Weitere hieran anknüpfende Überlegungen werden die mit der Thermosäule angestellten Messungen nicht isoliert, sondern zusammen mit den photometrischen Ergebnissen zu betrachten haben.

Was zunächst auffällt, ist der Unterschied zwischen den Kurven für die Eigenenergie der Kanalstrahlen und denjenigen für die Phosphoreszenzenergie hinsichtlich ihres Gesamtcharakters. Während es hier zu einem Maximum in der Intensität der abgelenkten Bündel kommt, ist dies dort nicht der Fall<sup>1)</sup>; es ist offenbar so gering, daß es durch Überlagerung benachbarter Intensitäten verdeckt wird. Gewiß ist der Phosphoreszenzschirm für die Beobachtung der gesamten Energieverteilung der Thermosäule und dem Galvanometer überlegen, aber es ist nicht anzunehmen, daß bei unserm oben beschriebenen Messungsverfahren, welches in Abständen von je 1 mm die Intensitäten einzelner Bündelabschnitte verzeichnet, jede Spur eines Maximums sich verwischt haben sollte, falls ein solches in noch so geringer Ausprägung bestünde. Zudem lassen die schon mehrfach angeführten Versuche W. Wiens die hier gegebenen Resultate erklärlich erscheinen. Die ablenkende Feldstärke, etwa nur ein Viertel so stark, wie die in jenen Versuchen angewandte, ist zu gering, die Entladungsspannung zu niedrig, der Druck im Beobachtungsraum zu hoch, als daß es zur Ausbildung eines Maximums kommen könnte.

Wenn nun also die Phosphoreszenzbeobachtungen dem entgegenstehen, welche unter gleichen Bedingungen und selbst, wie Vorversuche zeigten, schon bei Feldspannungen von 150 bis 200 Volt stets, sowohl im positiven wie im negativen Bündel, ausgeprägte Maxima aufweisen, so wird man diesen Widerspruch kaum auf Rechnung von Versuchsungenauigkeiten setzen dürfen. Dazu stimmen unsere in den beiden Teilen durchgeführten Messungen zu gut untereinander überein und

1) Hr. W. Wien erhält solche Maxima, was, wie schon vorher vermutet (26.), ebenfalls auf Druckverhältnisse im Beobachtungsraum hindeutet, die von den in unseren Versuchen herrschenden abweichen.

sind zu sehr durch die in früheren Veröffentlichungen enthaltenen Mitteilungen gestützt.

32. Wir schließen also aus dem verschiedenartigen Kurvenverlauf der Phosphoreszenzintensität und der Eigenenergie der erregenden Kanalstrahlen auf das Bestehen eines spezifischen Proportionalitätsfaktors für die positiven, negativen und neutralen Strahlen bei der Erregung von Lichtemission in Phosphoren. Wollen wir dies näher begründen, so ist darauf hinzuweisen, daß bei unseren Versuchsbedingungen, insbesondere den Druckverhältnissen im Beobachtungsraum, nach allem, was frühere seit 1908 angestellte Untersuchungen lehrten, nicht zu bezweifeln sein wird, daß die vom Feld bewirkte Strahlerlegung an der Stelle des Schirms wie der Thermosäule trotz teilweiser Regeneration Differenzierungen in der Natur der einzelnen Bündel im Gefolge hat. Das beweisen vor allem die mit Auffängern angestellten Messungen W. Wiens<sup>1)</sup>, die selbst bei höheren Drucken in denselben Entfernungen vom ablenkenden Magnetfeld, wie sie hier zwischen Phosphoreszenzschirm bzw. Thermosäule und elektrischem Feld bestehen, eine prozentual stärkere Schwächung des positiven Stromes als des neutralen Strahles nachweisen, letzterer nach der Intensität seiner Lichtemission beurteilt.

33. Betrachten wir nun weiter die in den Kurven gegebenen quantitativen Verhältnisse. Besonders ist nach dem Betrage der Intensität des positiven und negativen Bündels in Prozenten des neutralen zu fragen. Bei den Phosphoreszenzintensitäten mit ihrem ausgeprägten Maximum im positiven und negativen Streifen wählten wir diese Größe als Kennzeichen. Bei den Kurven für die Eigenenergien gibt es ebenfalls Maxima in den positiven und negativen Bündeln, nur sind sie bei dem geringen Betrage der thermoelektrischen Wirkung durch das ablenkende Feld nicht weit genug herausgerückt<sup>2)</sup>, um nicht durch die

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. p. 1025—1042. 1908; 30. p. 349 bis 368. 1909.

2) Frühere Beobachtungen lassen es übrigens als zweifelhaft erscheinen, ob bei den in unseren Versuchen im Beobachtungsraum herrschenden Drucken durch stärkere Felder die Maxima weiter herausgerückt worden wären, ob nicht vielmehr ihre Wirkung nur darin bestanden hätte, den Betrag der abgelenkten Intensitäten zu steigern, da-

vom neutralen Bündel herrührende Diffusion verdeckt zu werden. Wir gewinnen sie aber, wenn wir von den, mit ablenkendem Felde aufgenommenen Kurvenwerten jeweils die Ordinatenbeträge abziehen, welche die Kurven für das unbeeinflusste Bündel in ihren Randpartien zusammensetzen. Als dann kommt es bei dem steileren Verlauf der letzteren dort zu einem Maximum, wo die Intensitäten des unbeeinflussten Strahles verschwinden, ihre Kurven die Abszissenachse schneiden. Diese Stellen aber haben genau den gleichen Abstand von der Symmetrielinie des unabgelenkten Strahles, wie die Maxima der Phosphoreszenzstreifen vom Mittelpunkt des neutralen Fleckes. Dies bestätigt frühere Beobachtungen W. Wiens<sup>1)</sup> über die Koinzidenz der Maxima der Wärmewirkung auf die Thermosäule mit denen der Fluoreszenzwirkung.

34. Diese Maxima nehmen wir zum Maßstab für die Intensität der abgelenkten Bündel, drücken sie wieder in Prozenten der Maximalordinate des unabgelenkten Bündels aus und erhalten folgende Daten (vgl. Tab 5<sup>2)</sup>, p. 883).

35. Der Tabelle ist folgendes zu entnehmen. Zunächst bemerkt man, daß das theoretisch zu erwartende Verhältnis zwischen Spannung und Wärmewirkung bei variierender Spannung nicht vorhanden ist. Dies wird bei den von früheren Arbeiten her bekannten Komplikationen, welche die Abhängigkeit der Kanalstrahlengeschwindigkeit von der Entladungsspannung verschleiern, nicht Wunder nehmen. Wenn ferner bei gleichen Entladungsspannungen in Luft und Wasserstoff nicht die gleiche Wärmewirkung der Strahlen zustande kommt, sondern in Luft eine geringere, so könnte dies daran liegen, daß bei gleicher Entladungsspannung Wasserstoff einen höheren Druck im Entladungsraum braucht als Sauerstoff, mithin für diesen die Zahl der im Strahl fliegenden Teilchen pro Volumeneinheit geringer ist. Wir wiesen hierauf schon früher hin (12).

gegen die Lage des Maximums unbeeinflusst zu lassen. Siehe hierüber H. Baerwald, Ann. d. Phys. 34. p. 893. 1911.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 33. p. 872. 1910.

2) Außer den in den Kurven 17—20 niedergelegten Resultaten sind für diese Tabelle noch die zweier weiterer Versuchsreihen herangezogen, je eine für Luft und Wasserstoff, sowie 22000 Volt Entladungsspannung gültig.

Tabelle 5.<sup>1)</sup>

Gas	Entladungs- spannung in Volt	Maximale Galvanometer- ausschläge in Zentimetern			$\frac{a}{b}$	Intensität in Pro- zenten des neu- tralen Bündels		Bemerkungen
		a) positiv	b) negativ	c) neutral		positiv	negativ	
Luft	22000	0,8	0,45	27,8	1,78	2,88	1,62	Fig. 17
	11400	0,35	0,2	10,3	1,75	3,40	1,94	Fig. 18
	22000	1,0	0,5	35,3	2,00	2,83	1,42	
		I. Mittel:			1,84			
Wasserstoff	22000	2,3	0,7	67,0	3,28	3,43	1,05	
	11400	2,0	0,8	25,2	2,51	7,90	3,18	Fig. 20
	22000	2,3	0,8	72,5	2,88	3,18	1,10	Fig. 19
		II. Mittel:			2,89			

56\*

$$\frac{II}{I} = 1,57$$

1) Außer den in Figg. 17—20 niedergelegten Resultaten sind für diese Tabelle noch die Werte zweier Versuchsreihen herangezogen, je eine für Luft und Wasserstoff bei 22000 Volt Entladungsspannung gültig.

36. Ferner scheint Tab. 5 anzudeuten, daß Erniedrigung der Entladungsspannung Erhöhung des Anteils an abgelenkten Strahlen zur Folge hat; die Erscheinung wurde als zu weit vom Zielpunkt der vorliegenden Arbeit abliegend, nicht weiter verfolgt. Folgerungen ließen sich auch wohl erst bei Kenntnis aller hierbei in Betracht kommenden Faktoren daran anknüpfen.

37. Abgesehen von dem einen Fall, wo der Prozentsatz der positiven und negativen Strahlen 7,9 bzw. 3,4 von Hundert der neutralen beträgt, erreicht sie in den übrigen Reihen nur eine Höhe von 3 bis 3,5%, resp. 1 bis 2%. Der Betrag des positiven Anteils ist nicht ganz dreimal so groß wie der negative bei Wasserstoff, nicht ganz zweimal so groß bei Luft. Hier kommt die von W. Wien gefundene Tatsache zum Ausdruck, daß bei Sauerstoffkanalstrahlen die negativen Ionen überwiegen, wenn im Beobachtungsraum Drucke herrschen, wie sie etwa bei unseren Versuchen bestehen, bei Stickstoff dagegen die positiven vorherrschen. Luftkanalstrahlen werden also eine Differenzwirkung aufweisen, die in einem geringeren Überschuß der positiven Ionen über die negativen ihren Ausdruck findet, als er bei Wasserstoff zu konstatieren ist.

38. Die Überschüsse der positiven Strahlintensitäten über die negativen, wie sie Tab. 5 in den Quotienten  $a/b$  wiedergibt, halten sich sowohl bei Luft, wie bei Wasserstoff hier auf derselben Höhe wie bei der Phosphoreszenzwirkung — von der unsichereren Messung der Ba-Phosphore eben wieder abgesehen. Wieder ist hier wie früher, das Überwiegen der positiven über die negative Strahlenmenge bei Wasserstoff rund 1,5 mal größer als bei Luft.

Damit ist der Schluß gegeben, daß es einen Unterschied in der Wirkung positiver und negativer Kanalstrahlteilchen auf Phosphore nicht gibt.

39. Dagegen weist der Vergleich der Intensitätsbeträge der abgelenkten Strahlen, wie sie in Tabelle 5 gegeben sind, mit denjenigen der in Tabelle 4 zusammengestellten Phosphoreszenzwirkungen in den früheren Versuchen auf einen fundamentalen Unterschied hin. Die Zahlen bewegen sich dort in einer ganz anderen Größenordnung und sind in ihrem 10 bis 30 mal größeren Betrage nicht etwa durch methodische Fehler — die Genauigkeit unserer Resultate ist etwa

auf 10 Proz. einzuschätzen —, sondern nur durch die Natur der in Frage kommenden Phänomene zu erklären.

40. So führt uns die Betrachtung der quantitativen Verhältnisse, wie die des Kurvenverlaufes in den verschiedenen Fällen überhaupt, zu denselben Schlußfolgerungen: Die von Kanalstrahlen erregte Phosphoreszenzenergie kann nicht als Ausdruck der Eigenenergie der Kanalstrahlen betrachtet werden. Die Versuche weisen eine stärkere Wirkung des positiven und negativen Teils des zerlegten Kanalstrahlenbündels nach, als sie dem neutralen zuzuschreiben ist. Dabei kommt es nur auf die Ladung als solche, nicht aber darauf an, ob sie positiv oder negativ ist.

Über den Ursprung der Phosphoreszenzenergie sagen unsere Versuche nichts aus und lassen die Frage, ob bei der Phosphoreszenzerregung durch Kanalstrahlen ein Vorgang der Energieübertragung oder ein solcher der Auslösung vorliegt, offen.

41. Die Wirkung der Kanalstrahlen auf Phosphore ist offenbar wesentlich verschieden von der auf eine lichtempfindliche Schicht. Die Herren J. Koenigsberger und J. Kutschewski<sup>1)</sup> finden die Schwärzung nur von der Zahl der auftreffenden Kanalstrahlteile abhängig, von ihrer elektrischen Natur dagegen unabhängig. Danach wäre zu vermuten, daß der Vorgang der photographischen Schwärzung, als ein chemischer, seiner ganzen Natur nach sich von der Phosphoreszenzerregung, als einem elektrischen Prozesse, unterscheidet und nicht die Verwandtschaft mit ihm besitzt, die man in beiden Fällen öfters hat erblicken wollen.

42. Dagegen ist die Sekundärstrahlung als ein der Phosphoreszenzerregung verwandter Vorgang durch die Arbeiten Lenards nachgewiesen worden. Es wäre möglich, daß die bei letzterer zutage tretenden Erscheinungen sich auch bei ersterer wiederfinden. Aufgabe weiterer Untersuchungen wird es sein, auch bei der Sekundärstrahlung nach der Existenz spezifischer Wirkungen zerlegter Kanalstrahlenbündel zu forschen, und ich hoffe, später über solche Messungen berichten zu können.

---

1) J. Koenigsberger u. J. Kutschewski, *Ann. d. Phys.* 37. p. 182. 1912.



VII. Zusammenfassung.

43. Die Resultate der Untersuchung seien in folgenden Sätzen kurz zusammengefaßt:

1. Bei der Erregung von Erdalkaliphosphoren durch Kanalstrahlen ist den geladenen Teilchen eine stärkere spezifische Wirkung gegenüber den ungeladenen zuzuschreiben.

2. Die Art der Ladung kommt indessen bei dieser spezifischen Wirkung nicht in Betracht; vielmehr ist diese bei den positiven und negativen Teilchen gleich groß.

3. Diese Ergebnisse unterscheiden die Phosphoreszenzerregung von der chemischen Wirkung der Kanalstrahlen auf die lichtempfindliche Schicht, bei der nur die Zahl der Teilchen, nicht aber ihr Ladungszustand in Frage kommt, und lassen die Phosphoreszenzemission als einen wesentlich elektrischen Vorgang erscheinen.

Die Anregung zur Bearbeitung des vorliegenden Problems verdanke ich Herrn Geheimrat W. Wien, weitgehende Unterstützung durch Gewährung der Mittel des Instituts Herrn Geheimrat K. Schering. Ich möchte Gelegenheit nehmen, meinen herzlichen Dank hier zum Ausdruck zu bringen.

Würzburg und Darmstadt, im Mai 1912.

(Eingegangen 7. Juni 1912.)

**6. Nachtrag zu meiner Arbeit:  
Eine neue Hypothese über das Wesen  
der verschiedenen Aggregatzustände und  
Modifikationen;  
von Léon Schames.**

§ 1. Eine Variation der Hypothese.

Während die ursprüngliche Hypothese<sup>1)</sup> auf dem Grundgedanken basierte, daß das Energieverhältnis vor und nach einer Zustandsänderung im Grenzfall gleich sein sollte dem Verhältnis der Atomzahlen der betreffenden Moleküle

$$\frac{E_1}{E_2} \sim \frac{n_2}{n_1},$$

wollen wir jetzt eine Variation dieser Hypothese geben, die einen direkten Anschluß an die van der Waalssche Gleichung ermöglicht und eine vollständige Übereinstimmung der hier-nach modifizierten Zustandsgleichung mit der Erfahrung gibt. Um mit der ursprünglichen Hypothese zum selben Ziele zu gelangen, hätte man eine Volumkontraktion annehmen müssen, die nicht recht plausibel gewesen wäre. Trotzdem können wir noch nicht endgültig entscheiden, welcher von den beiden Hypothesen nun wirklich der Vorzug zu geben ist. Da sich eine theoretische Begründung für beide erbringen läßt, je nachdem auf welchem Standpunkt man eben von vornherein steht, so wollen wir vorläufig von einer solchen ganz absehen und nur angeben, daß die abgeänderte Hypothese darin besteht, daß das Energieverhältnis dem Quadrat der Atomzahlen im Grenzfall gleich sein soll:

$$\frac{E_1}{E_2} \sim \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2.$$

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 38. p. 830. 1912.

Demnach müssen wir die früher (l. c.) gegebenen Formeln für den flüssigen und festen Zustand abändern, und zwar wird z. B. flüssiges Quecksilber nicht mehr vier-, sondern zweiatomig, ebenso festes Benzol ( $2 \times 12$ )-atomig und flüssiges ( $\sqrt{2} \times 12$ )-atomig! Letzteres erscheint auf den ersten Blick unverständlich, heißt aber einfach, daß flüssiges Benzol aus 59 Proz.  $C_6H_6$  und 41 Proz.  $(C_6H_6)_2$  besteht. Hier wie im folgenden sind immer Gewichtsprozente zu verstehen, so daß mithin auf  $n$  Einfachmoleküle angenähert  $n/3$  Doppelmoleküle kommen. Da Benzol eine normale Flüssigkeit ist, so bleibt diese Konstitution vom kritischen Punkt an bis zu etwa  $40^\circ C$ . gewahrt. Dann assoziieren sich allmählich noch einige Prozent, bis im Augenblick des Erstarrens plötzliche Assoziation der noch unveränderten Moleküle einsetzt. Die Zahlenverhältnisse<sup>1)</sup> ergeben für flüssiges Benzol von  $5^\circ C$ . eine Konstitution von 53 Proz.  $C_6H_6$  und 47 Proz.  $(C_6H_6)_2$ ; für festes Benzol der gleichen Temperatur folgt dann 17 Proz.  $C_6H_6$  und 83 Proz.  $(C_6H_6)_2$ .

Nach dieser Auffassung ist also eine normal-flüssige chemische Verbindung ein Gemisch von einfachen Gasmolekülen und von Doppelmolekülen. Der Körper ist fest bei mehr als ca. 80 Proz. Doppelmolekülen, er ist flüssig bei ca. 40 Proz. Doppelmolekülen, er ist dampfförmig bei weniger als 40 Proz. und schließlich ideal-gasförmig bei 0 Proz. Doppelmolekülen.

Dies gilt aber nur für chemische Verbindungen, bei den Elementen liegen die Verhältnisse etwas anders, worauf wir gleich zurückkommen werden.

## § 2. Die modifizierte van der Waals'sche Gleichung.

Die normal-flüssigen chemischen Verbindungen zeigen also ein Molekulargewicht von sehr nahe  $\sqrt{2}m$ , wenn  $m$  das Mole-

1) L. Schames, l. c. Tab. I und II. Es sei hier bemerkt, daß die Energieinhalte nach dem Verdampfen in Tab. II, III und IV lediglich mit Benutzung der inneren Verdampfungswärme berechnet worden sind; es wäre zuverlässiger gewesen, auch die spezifische Wärme des Dampfes zu benutzen. Tut man dies, so ergeben sich in den Tabellen kleine Fehler, und zwar im Maximum in Tab. II 1 Proz., in III 2 Proz. und in IV  $3\frac{1}{2}$  Proz.

kulargewicht des idealen Gaszustandes bedeutet. Im *Dampfzustande* wird also das Molekulargewicht  $c \cdot m$  sein, wo  $1 \leq c \leq \sqrt{2}$ , und die auf ein Gramm bezogene van der Waalssche Gleichung:

$$(v - b) \left( p + \frac{a}{v^2} \right) = \frac{R}{m} T$$

wird übergehen in:

$$(v - b) \left( p + \frac{a}{v^2} \right) = \frac{R}{c \cdot m} T.$$

Für den kritischen Punkt wird hieraus:

$$a_{\kappa} = 3 p_{\kappa} v_{\kappa}^3,$$

$$b_{\kappa} = \frac{v_{\kappa}}{3},$$

$$c_{\kappa} = \frac{3 T_{\kappa} R}{8 p_{\kappa} v_{\kappa} m} = \frac{3 T_{\kappa} R d_{\kappa}}{8 p_{\kappa} m},$$

$c_{\kappa}$  läßt sich also ohne weiteres berechnen, wenn die drei kritischen Daten bekannt sind, und  $c_{\kappa}$  gilt dann bei normalen Flüssigkeiten vom kritischen Punkte an bis kurz vor dem Erstarren. Für ca. 50 Substanzen läßt sich hiernach diese Größe berechnen; sie liegt tatsächlich für normale Flüssigkeiten sehr nahe bei  $\sqrt{2}$ , ihr Wert schwankt etwa von 1,36 bis 1,47. Diese Schwankungen von  $\pm 4$  Proz. können nur zum Teil durch Versuchsfehler bedingt sein. Die Messungen, z. B. für Kohlensäure ( $c_{\kappa} = 1,36$ ), sind außerordentlich genau, so daß die Schwankungen wahrscheinlich in der Individualität der Flüssigkeit begründet sein dürften. Es schwankt somit die Zusammensetzung der verschiedenen normalen Flüssigkeiten zwischen 64 Proz. Gasmoleküle und 36 Proz. Doppelmoleküle einerseits und 53 Proz. Gasmoleküle und 47 Proz. Doppelmoleküle andererseits.

Diese individuelle Verschiedenheit bedingt auch, daß eine „reduzierte“ Zustandsgleichung nicht für alle Körper exakt gelten kann.

Was nun die chemischen Elemente betrifft, so sind nur für ein einziges alle drei kritische Daten exakt genug bekannt:

für den Sauerstoff. Für diesen folgt  $c_* = 1,94$  oder, da das kritische Volumen nicht allzu sicher ist, genügend genau  $= 2,0$ . Aus Tab. I der vorigen Arbeit<sup>1)</sup> folgt aus den Energieverhältnissen dasselbe für Quecksilber, Zink, Cadmium und Schwefel. Es wird voraussichtlich für alle Elemente gelten; läßt sich aber auf zwei getrennte Arten erklären. Am einfachsten würde es heißen, daß das betreffende Element flüssig aus zwei Gasmolekülen besteht. Dann liegt aber zwischen den Elementen und den Verbindungen keine Analogie vor. Um diese zu erhalten, ist es vielleicht gerechtfertigt anzunehmen, daß die Elemente Doppeldoppelmoleküle bilden, und daß die flüssigen Elemente mithin aus etwa 33 Proz. dieser und 67 Proz. einfacher Moleküle bestehen. Wir könnten daher die Formel für flüssigen Sauerstoff einfach  $(O_2)_2$  schreiben, ziehen aber  $(O_2)_{\sqrt{4}}$  vor, in Analogie zu flüssigem Benzol  $(C_6H_6)_{\sqrt{2}}$ . Analog wäre die Formel für den festen Zustand  $(O_2)_4$  und  $(C_6H_6)_2$ .

Kehren wir zur van der Waalsschen Gleichung zurück, so waren bisher  $a$  und  $b$  keineswegs konstant und ihre Abhängigkeit ließ sich nicht gesetzmäßig festlegen. Das bietet aber jetzt keine Schwierigkeit, sobald wir uns auf normale Flüssigkeiten beschränken. Wir führen  $a_*$  und  $b_*$  als durch obige Gleichungen definiert und demnach als *konstant* ein. Während des normal-flüssigen Zustandes wird  $b \equiv b_*$ , im dampfförmigen nimmt  $b$  zu, und zwar  $b = b_* \frac{c_*}{c}$ ; im idealen Gaszustand schließlich  $b = b_* \cdot c_*$ , hier sehr nahe  $= \sqrt{2} \cdot b_*$ .  $a$  läßt sich, was schon Clausius und nach ihm eine Reihe anderer Forscher getan haben, der Temperatur umgekehrt proportional setzen, worauf wir noch zurückkommen. Da diese innere Anziehung nach unserer Anschauung nur durch die Doppelmoleküle bedingt ist, muß sie auch noch proportional deren Anteil, also bei normalen chemischen Verbindungen proportional  $c - 1$  sein, so daß wird:

$$a = a_* \cdot \frac{T_*}{T} \cdot \frac{c - 1}{c_* - 1}.$$

1) L. Schames, l. c. p. 832.

Dies alles eingesetzt führt zur folgenden Gleichung, die im idealen Gaszustand und auch im dampfförmigen und flüssigen für normale Substanzen streng gilt:

$$\left( v - b_n \frac{c_n}{c} \right) \left( p + \frac{c-1}{c_n-1} \frac{a_n}{v^2} \frac{T_n}{T} \right) = \frac{R T}{c m}.$$

### § 3. Bestätigung durch die Erfahrung.

Zur Prüfung unserer Gleichung sind die sehr genauen Messungen an Kohlensäure von Amagat und an Benzol von Young sehr geeignet. Wir geben für erstere Substanz eine Figur, um die charakteristischen Erscheinungen zu verfolgen, für letztere hingegen eine Tabelle, weil hier der Temperaturbereich ein zu weiter ist.

Im beobachteten Intervall, bei Kohlensäure von der kritischen Temperatur bis  $-30^\circ$ , bei Benzol von der kritischen Temperatur bis zum Schmelzpunkt, wird unsere Gleichung hervorragend gut bestätigt.

In unserer Figur ist  $A$  der kritische Punkt,  $BAC$  die Grenzkurve. Während bei den einzelnen Isothermen links die Temperatur in Celsiusgraden steht, ist rechts der Wert von  $c$  angeschrieben, der aus unserer Gleichung folgt. Durch vier dieser Punkte sind die Linien  $c = \text{const.}$ , also die Kurven konstanter Assoziation punktiert gezeichnet. Die Linie  $c = c_n$  wird unterhalb des kritischen Punktes durch die Grenzkurve, oberhalb durch die kritische Isotherme dargestellt. Verfolgen wir nun eine Isotherme, z. B. für  $20^\circ \text{C}$ . Ganz rechts kommen wir aus dem idealen Gaszustand, es haben sich bis  $D$  schon etwa 15 Proz. Doppelmoleküle gebildet. Bei  $E$  überschreiten wir die Linie  $c = 1,18$ , d. h. 18 Proz. Doppelmoleküle, bei  $F$  die Linie  $c = 1,26$  und erreichen bei  $G$  ( $c = 1,33$ ) die Grenzkurve. Hier beginnt also die Kondensation, die prozentual fortschreitet, bis alles kondensiert ist; diesem Gemisch entspricht die Gerade  $GH$ . Die Doppelmoleküle machten hier im Dampf 33 Proz. aus, in dem verflüssigten Teil aber 36 Proz.; diesem Sprung entspricht die latente Wärme, die Verdampfungswärme, die hier frei wird. Wäre der Dampfzustand bei höherem



Für Benzol ergibt sich folgende Tabelle:

$t^{\circ}\text{C.}$	$p\text{ Atm.}$	$v_1$ ccm pro g	$v_2$	$c_d$	$c_{\text{dampf}}$	
288,5	47,9	3,28		1,41		krit. Punkt
280	43,1	6,01	2,20	1,41	1,395	
260	33,35	9,61	1,885	"	1,36	
240	25,5	14,0	1,72	"	1,32	
220	19,1	19,95	1,60	"	1,27	
200	14,0	28,3	1,514	"	1,22	
160	7,0	57,6	1,39	"	1,14	
120	2,9	132	1,32	"	1,07	
80	1,0	361,7	1,23	"	1,03	
40	0,24	—	1,17	1,42	—	
5	0,05	—	1,12	1,46	—	Schmelzpunkt

Es folgt also auch hieraus, daß Benzol von der kritischen Temperatur an bis ca.  $40^{\circ}$  durchaus normal ist. Hervorzuheben ist, daß wir hier auf anderem Wege als oben zur selben Zusammensetzung kommen; so fanden wir oben für  $5^{\circ}$  47 Proz. und hier 46 Proz. Doppelmoleküle, also eine gute Übereinstimmung!

Unsere Gleichung kann auch zur Berechnung des Dampfdruckes einer normalen Flüssigkeit dienen, wenn von dieser das spezifische Volumen bei der betreffenden Temperatur und die drei kritischen Daten bekannt sind.

#### § 4. Oberflächenspannung. Anormale Flüssigkeiten.

Wir hatten oben die innere Anziehung  $a$  für normale Flüssigkeiten der Temperatur umgekehrt proportional gesetzt. Diese innere Anziehung und die Oberflächenspannung gehen nun aber einander parallel; mithin können wir auch die Oberflächenspannung der Temperatur umgekehrt proportional setzen. Das ist aber nichts anderes als die Eötvössche Regel. Für diese hatten wir<sup>1)</sup> die Konstante abgeändert, und zwar der ursprünglichen Hypothese entsprechend:

$$K = k \cdot (2)^{1/2} = 3,36.$$

1) L. Schames, l. c. p. 839.



Jetzt können wir für normal-flüssige chemische Verbindungen im Durchschnitt schreiben:

$$K = k \cdot (\sqrt{2})^{1/2} = 2,67 = \frac{8}{3}.$$

Es ist möglich, daß sich dieser Wert theoretisch wird ableiten lassen.

Die *anormalen* Flüssigkeiten unterscheiden sich nun von den normalen außer durch der mit Temperaturabnahme fortschreitenden Assoziation noch dadurch, daß die innere Anziehung, also auch die Oberflächenspannung, nicht die einfache Temperaturabhängigkeit zeigt. Jedoch scheint in dieser Hinsicht keine scharfe Grenze zu bestehen. Die Assoziationswerte im kritischen Punkte sind für *anormale* Flüssigkeiten folgende:

	$c_x$
Methylalkohol . . . . .	1,70
Äthylalkohol . . . . .	1,50
Propylalkohol . . . . .	1,50
Essigsäure . . . . .	1,87
Wasser . . . . .	1,75

Der Wert für Wasser ist aus den kritischen Daten berechnet, die Schüle<sup>1)</sup> nach Sichtung der neueren Messungen am zuverlässigsten hält. Wenn wir die weitere starke Assoziation berücksichtigen, so wird für die *anormalen* Flüssigkeiten die Annahme von Vierfachmolekülen neben den Doppel-molekülen berechtigt erscheinen.

#### § 5. Abhängigkeit der spezifischen Wärme der Gase von ihrer Molekularkonstitution.

Es erscheint von vornherein einleuchtend, daß die spezifische Wärme der Gase sich ändern wird, wenn sich Doppel-moleküle bilden. Diese Abhängigkeit wäre von Interesse für die Entscheidung über die Konstitution der Elemente, es wären

1) W. Schüle, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1911. p. 1506.

also die ein- und zweiatomigen Gase in der Nähe ihres kritischen Zustandes hierauf zu untersuchen. Man müßte zuerst für eine Linie gleicher Assoziation eventuelle Temperatur- und Druckabhängigkeit feststellen und dann vielleicht bei konstanter Temperatur, am besten der kritischen, die Abhängigkeit von der Assoziation ( $c$ ) suchen.

Von bisher vorliegenden Untersuchungen scheinen nur diejenigen an Kohlensäure bis in das kritische Gebiet zu reichen. Bis etwa an den Punkt  $G$  unserer Figur gehen die Messungen von Joly.<sup>1)</sup>  $c_v$  nimmt, wie zu erwarten, mit steigender Assoziation zu, scheint aber sonst vom Druck unabhängig zu sein. Von diesem hängt hingegen  $c_p$  stark ab. Nach Joly ist für  $78,0^\circ$  und für  $v = 5,07$  ccm/g, also bei einem Druck von rund 90 Atm.,  $c_v = 0,2082$ . Nach Lussana<sup>2)</sup> ist für  $79,2^\circ$  und 90 Atm.  $c_p$  rund 0,68. Mithin würde hier ein Wert von  $c_p/c_v = 3,26$  folgen. Noch interessanter werden diese Verhältnisse in möglichster Nähe des kritischen Punktes sein.

Auch in der neuen Arbeit von Eucken<sup>3)</sup>, die allerdings ein anderes Ziel verfolgt, läßt sich der Einfluß der Assoziation nachweisen. Es ist nämlich dort für Wasserstoff bei sehr niedrigen Temperaturen:

T	$c_v$	
	$v = 102$	$v = 187$ ccm/g
35	1,71	1,60
40	1,64	1,59
45	1,65	1,57

Es zeigt sich also auch hier näher zum kritischen Zustand, also bei kleinerem Volumen und niedrigerer Temperatur, größeres  $c_v$ . Aus  $T_n = 32$  und  $p_n = 14$  folgt unter Annahme von  $c_n = 2$ , ein kritisches Volumen  $v_n = 17,5$ , so daß die Ver-

1) J. Joly, Proc. Roy. Soc. 55. p. 393. 1894.

2) S. Lussana, Winkelmanns Handb. der Physik 3. p. 231. 1906.

3) A. Eucken, Ber. d. Berl. Akad. p. 141. 1912.

suche von Eucken immerhin noch weit vom kritischen Punkt entfernt waren.

Während die van der Waalssche Theorie verlangt, daß  $c_{\infty}$  vom Druck unabhängig ist, folgt aus dem Experiment das Gegenteil. Diese Abhängigkeit vom Druck ist nach unserer Hypothese eine Abhängigkeit von der Assoziation, und Experiment und Hypothese sind in guter qualitativer Übereinstimmung. Eine quantitative Untersuchung dieser Verhältnisse behalte ich mir noch vor.

(Eingegangen 1. August 1912.)

---

*Berichtigung bei der Korrektur:* In vorliegender Arbeit ist zwischen Elementen und chemischen Verbindungen ein Unterschied gemacht worden, insofern ersteren eine kritische Assoziationskonstante von 2, letzteren eine solche von  $\sqrt{2}$  zukommen soll. Da jedoch für HCl genau  $c_{\infty} = 2$  folgt, so wird es vielleicht richtiger sein, den Unterschied auf die Atomzahl im Molekül zurückzuführen, so daß also  $c_{\infty} = 2$  für zweiatomige, und  $c_{\infty} = \sqrt{2}$  für mehratomige Gase gilt. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß flüssiges HCl normal ist, sollte es wider Erwarten anormal sein, so könnte daher der hohe Wert von  $c_{\infty}$  kommen, und die ursprüngliche Ansicht wäre dann beizubehalten.

---

